

Einführung und Überblick

Thomas Zehrt

Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Outline

- 1 Zinseszinsrechnung
- 2 Elementare Funktionen
 - Der Graph einer Funktion
 - Gerade, Parabel, Winkelfunktionen, e- und ln-Funktion
- 3 Gleichungen und Ungleichungen
 - Struktur der Lösung
 - Polynome und ihre Nullstellen
 - Auflösen und Umkehrfunktion
 - Dividiere nie durch Variablen!!
 - Lass den Betrag nicht einfach weg!!
 - Sorgfältig Rechnen!
- 4 Lösen linearer Gleichungssysteme durch Elimination
- 5 Deutung der Ableitung
- 6 Deutung des bestimmten Integrals

Satz (Zinseszinsformel für einmalige Verzinsung)

Ein Anfangsguthaben K_0 , das zu einem Zinssatz p angelegt wird, wächst nach n Jahren zu einem Endkapital

$$K_n = K_0 \cdot (1 + p)^n$$

Folgerungen:

- Wie lange dauert es, bis sich K_0 bei festem p verdoppelt hat?
Löse $2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + p)^n$ nach n auf:

$$n = n(p) = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + p)}$$

- Doppeltes Anfangsguthaben \longrightarrow Doppeltes Endguthaben
- Doppelter Zins \longrightarrow ??

Example (Der Josephsrappen, *Richard Price, 1723-1791*)

Was hätte der Zinseszinsseffekt aus vor 2000 Jahren angelegten 0.01 CHF gemacht?

- $p = 0.01 = 1\%$

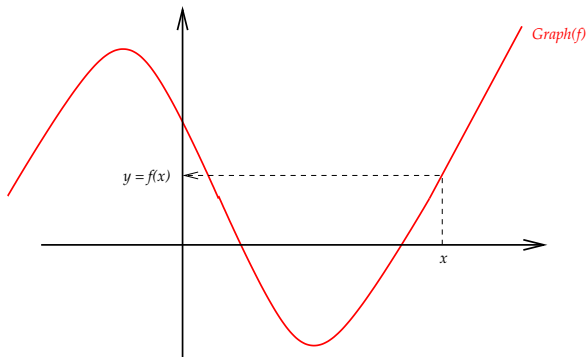
$$K_{2000} = 0.01 \cdot 1.01^{2000} \approx 4'392'682, - \text{CHF}$$

- $p = 0.02 = 2\%$

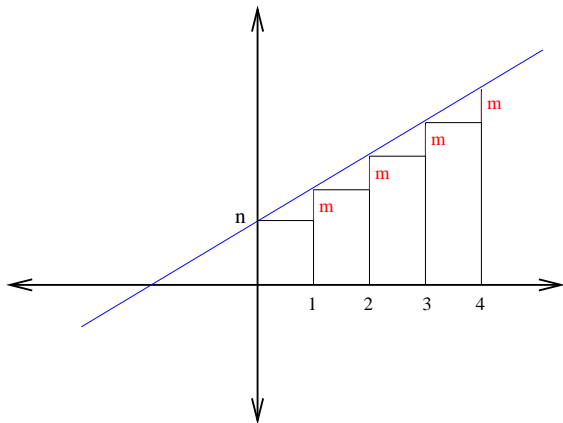
$$K_{2000} = 0.01 \cdot 1.02^{2000} \approx 1'586'147'328'000'000, - \text{CHF}$$

Notenumlauf 2014 62'700'000'000, - CHF

$$\text{Graph}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \subset \mathbb{R} \}$$



Die **Gerade** $g(x) = mx + n$.



Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$g(x+1) = m \cdot (x+1) + n = mx + n + m = g(x) + m$$

Folgerung:

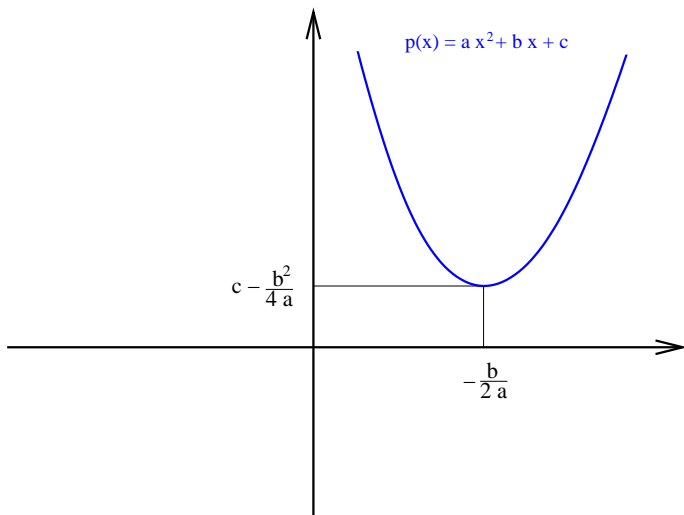
Eine Gerade ist durch zwei verschiedene Punkte **eindeutig** bestimmt, d.h. aus der Kenntnis von zwei Punkten auf der Geraden, kann die Geradengleichung hergeleitet werden.

Example (Fundamentalaufgabe)

Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte $(1, 1)$ und $(2, 3)$?

Oder durch irgendwelche zwei gegebene Punkte?

Die **Parabel** $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit ihrem Scheitel.



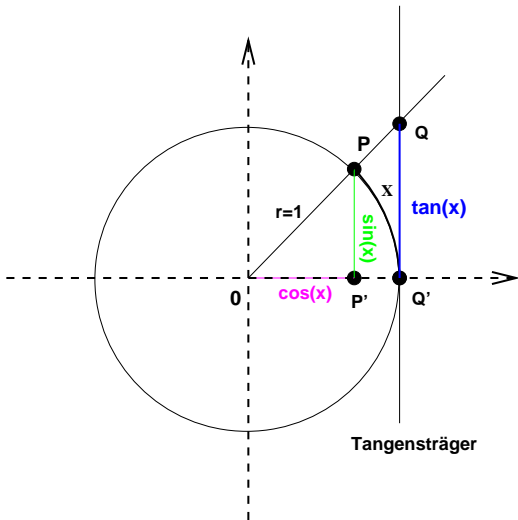
Folgerungen:

- Der Scheitel ist ein lokales (und globales) Extrema und lässt sich deshalb einfach durch Ableiten bestimmen:

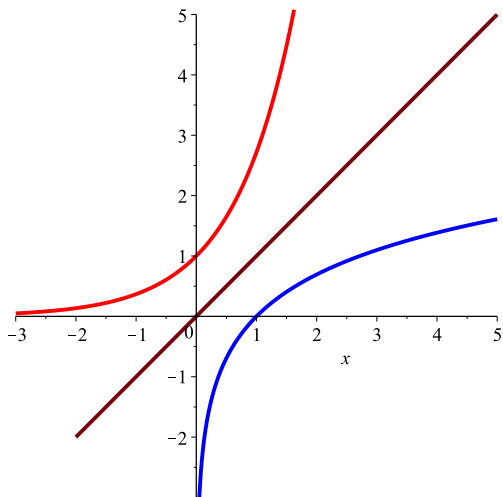
$$p'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$y = p(-b/2a) = c - \frac{b^2}{4a}$$

- $a > 0 \rightarrow$ Parabel nach oben geöffnet
- $a < 0 \rightarrow$ Parabel nach unten geöffnet

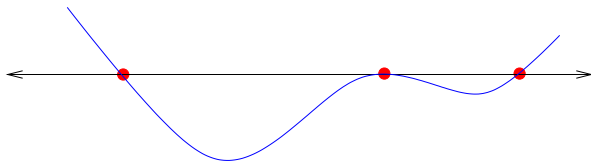
Die Winkelfunktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$.

Die Funktionen e^x (rot) und $\ln(x)$ (blau).

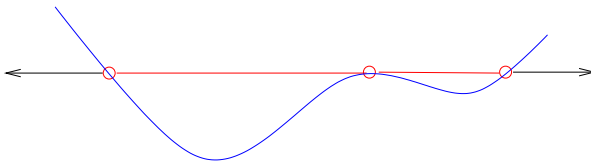


Wichtig:

Die Lösung von $f(x) = 0$ sind 3 (rote) **Punkte!**



Die Lösung von $f(x) < 0$ sind 2 (rote) **Intervalle!**



Wichtig:

x_i heisst Nullstelle von f , wenn $f(x_i) = 0$ gilt.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_n) = 0$$

Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n ablesen

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$(x - 3) \cdot (x + 5) = 0$$

Lösungen 3 und -5 ablesen

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

faktorisieren
(falls möglich)

ausmultiplizieren

$$(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

Lösungen 1, 2 und 3 ablesen

Example (Fundamentalaufgaben)

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:

① $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

② $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) + x \cdot (x - 2) = 0$

③ $x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) + 500 x \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

Wichtig:

Zum Auflösen einer Gleichung $f(x) = a$ benötigt man die Umkehrfunktion f^{-1} von f . Aber nicht jede Funktion besitzt eine Umkehrfunktion!

$$f(x) = a \quad \longrightarrow \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a) \quad \longrightarrow \quad x = f^{-1}(a)$$

Achtung: Nicht streng monotone Funktionen können nur über einem Monotonieintervall umgekehrt werden!

- $\ln(x) = 2$ (\ln ist streng monoton, also umkehrbar)
 $\longrightarrow e^{\ln(x)} = e^2 \longrightarrow x = e^2$
- $e^x = 10$ (e ist streng monoton, also umkehrbar)
 $\longrightarrow \ln(e^x) = \ln(10) \longrightarrow x = \ln(10)$
- $\cos(x) = 1/2$ (\cos ist nicht streng monoton, also nicht umkehrbar)
Der \cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend. Die Funktion \arccos (am Taschenrechner) bezeichnet die zugehörige Umkehrfunktion (für dieses Intervall).
 $\longrightarrow \arccos(\cos(x)) = \arccos(1/2) \longrightarrow x = \arccos(1/2)$

ist die einzige Lösung im Intervall $[0, \pi]$. Die Ausgangsgleichung hat aber **unendlich viele** Lösungen! Könnten Sie alle finden?

- $\ln(x^2 - 1) = 0$

Der Logarithmus ist nur für Werte grösser als 0 definiert. Der Definitionsbereich der Gleichung ist somit $x^2 - 1 > 0$ oder $x^2 > 1$ oder $|x| > 1$ (Betrag **nicht** vergessen). Beachten Sie, dass der Definitionsbereich somit aus den **beiden** Intervallen $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$ besteht!

$$\longrightarrow e^{\ln(x^2-1)} = e^0 = 1$$

$$\longrightarrow x^2 - 1 = 1$$

$$\longrightarrow x^2 - 1 + 1 = 1 + 1$$

$$\longrightarrow (x^2)^{1/2} = \pm 2^{1/2}$$

Dividiere **nie** durch eine Variable (die 0 sein könnte), sondern klammere aus!

Example

$$x^2 - x = 0$$

Falsch

$$x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \mid :x$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

Lösung: $x = 1$

Richtig

$$x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$$

Lösung: $x = 0$ oder $x = 1$

Lass den Betrag (beim Lösen einer Gleichung oder Ungleichung) **nicht** einfach weg!

Example

$$|x - 2| = 5$$

Falsch

$$\Leftrightarrow x - 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 5 + 2 = 7$$

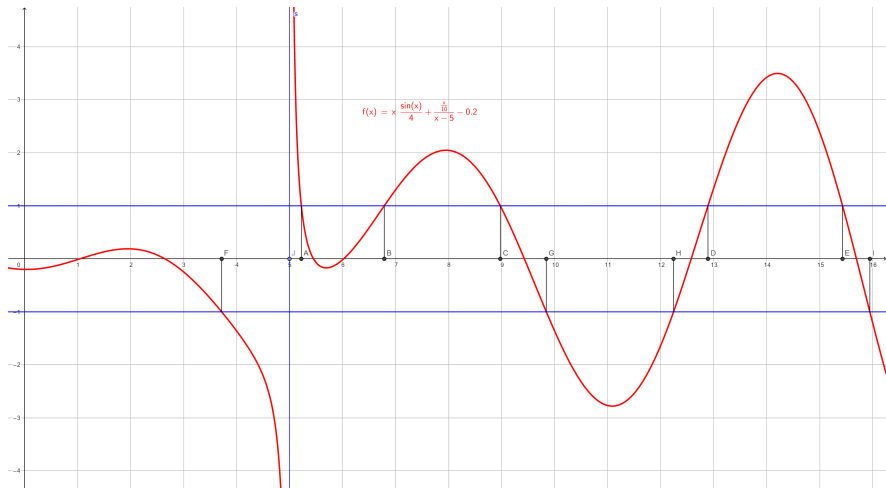
Richtig

$$\Leftrightarrow x - 2 = 5 \text{ oder } x - 2 = -5$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ oder } x = -3$$

Example (Fundamentalaufgabe)

Der Graph von f sei gegeben. Skizzieren Sie die Lösungsmengen für $f(x) = 1$, $f(x) = -1$ und $|f(x)| = 1$ sowie $f(x) < 1$ und $|f(x)| < 1$.



Rechnen Sie sorgfältig!!

Example

$$3 = \sqrt{x+1} - 2$$

Falsch

$$3^2 = (x+1) - 2^2$$

Richtig(er)

$$3^2 = (\sqrt{x+1} - 2)^2$$

$$3^2 = (\sqrt{x+1})^2 - 4 \cdot \sqrt{x+1} + 2^2$$

Die rechte Umformung ist korrekt, aber nicht hilfreich, denn die Wurzel ist noch immer vorhanden. Besser erst die Wurzel separieren

$5 = \sqrt{x+1}$ und dann quadrieren!

Rechnen Sie sorgfältig!!

Example

$$3 = e^x - 2$$

Falsch

$$\ln(3) = x - \ln(2)$$

Richtig(er)

$$\ln(3) = \ln(e^x - 2)$$

Die rechte Umformung ist korrekt, aber auch hier kommen wir nicht weiter, denn es gibt keine \ln -Regel um die rechte Seite weiter zu vereinfachen. Besser erst den e -Term separieren $5 = e^x$ und dann Logarithmieren.

- System

$$2x + 3y = 4$$

$$-2x + 2y = 6$$

- (irgend)eine Gleichung nach (irgend)einer Variablen auflösen

$$2x + 3y = 4$$

$$y = \frac{6 + 2x}{2} = 3 + x$$

- Elimination dieser Variablen aus der anderen Gleichung

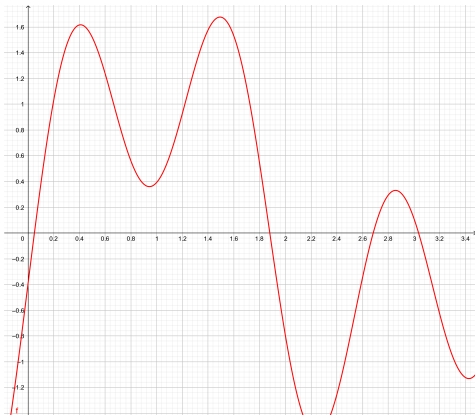
$$2x + 3(3 + x) = 4 \quad \text{auflösen nach } x \quad x = \underline{\underline{-1}}$$

- die andere Variable bestimmen

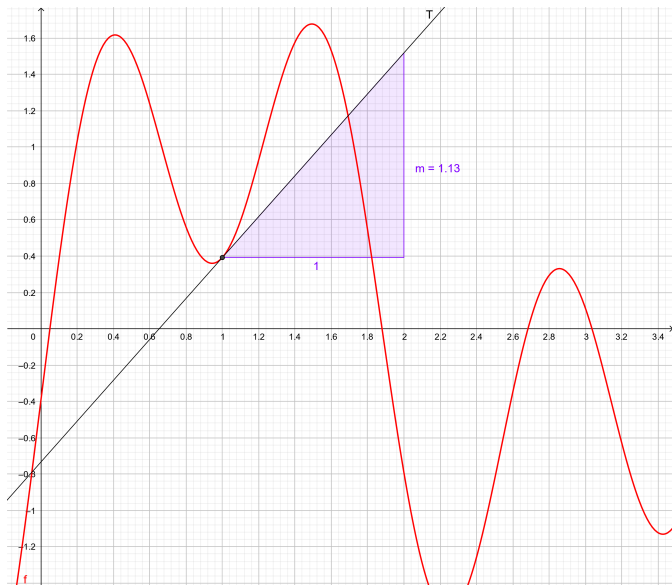
$$y = 3 + x = 3 + (-1) = \underline{\underline{2}}$$

Example (Fundamentalaufgabe)

In der folgenden Abbildung sehen Sie den Graphen einer Funktion f . Bestimmen Sie mit Hilfe von Lineal und Zeichendreieck näherungsweise den Wert $f'(1)$.

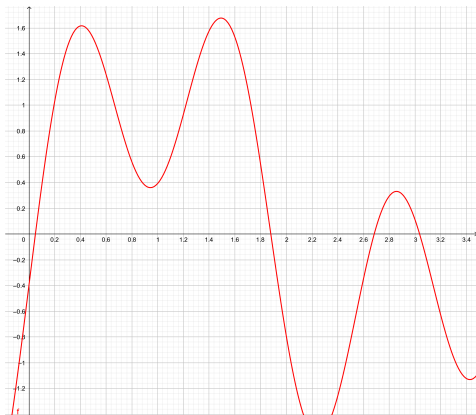


Deutung der Ableitung



Example (Fundamentalaufgabe)

In der folgenden Skizze sehen Sie den Graphen einer Funktion f .
Machen Sie in dieser Skizze kenntlich, wo man das bestimmte Integral $\int_1^2 f(x) dx$ sehen kann.



Deutung des bestimmten Integrals

