

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	2
2	Der Graph einer Funktion	4
3	Umkehrbarkeit	5
4	Wichtige Eigenschaften von Funktionen	8
5	Komposition von Funktionen	9
6	Einfache elementare Funktionen	10
6.1	Translationen	10
6.2	Skalierungen	12
6.3	Die Wurzelfunktion	14
6.4	Polynome	16
6.4.1	Polynome vom Grad 0	16
6.4.2	Polynome vom Grad 1	16
6.4.3	Polynome vom Grad 2	17
6.5	Rationale Funktionen	19
7	Aufgaben	22
8	Lösungen der Aufgaben	26

1 Grundlagen

Definition 1.1 Seien X und Y zwei beliebige Mengen. Eine Vorschrift, die jedem Element x aus der Menge X ($x \in X$) genau ein Element y aus der Menge Y ($y \in Y$) zuordnet, heisst Funktion.

Die Menge X heisst der Definitionsbereich und die Menge Y der Wertebereich von f . Die Menge

$$f(X) = \{ f(x) : x \in X \} = \{ y \in Y : \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y \} \subset Y$$

heisst die Bildmenge von f .

Eigentlich besteht eine Funktion aus **drei** Daten:

- Definitionsbereich X
- Wertebereich Y
- Zuordnungsvorschrift f

Schreibweise:

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto f(x) \quad \text{oder}$$

$$f : x \longmapsto f(x)$$

Eine gute und allgemeine Art, um sich Funktionen zu visualisieren ist es, die Mengen X und Y (symbolisch) zu zeichnen und Pfeile von Elementen aus X auf die zugeordneten Elemente in Y zu zeichnen.

Wichtig!

Wir wollen uns angewöhnen, zwischen der Funktion f und $f(x)$ konsequent zu unterscheiden:

f	die Funktion, d.h. eine Vorschrift , die jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet.
$f(x)$	Wert der Funktion f an der Stelle x , d.h. $f(x)$ ist ein Element der Menge Y .

Beispiel 1.1 Wir betrachten die beiden Funktionen (in Kurzschreibweise):

$$f(x) = x + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Beim Betrachten der Funktion g mag man sich sofort (!) an die dritte binomische Formel erinnern. Es gilt $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ und nach dem Kürzen ergibt sich $g(x) = x + 1$!?! Also sind die beiden Funktionen gleich!?! Nein, was gleich ist, sind die Werte von f und g an allen **gemeinsamen** Stellen der Definitionsbereiche. Genau genommen muss man beide Funktionen unter Angabe der Definitionsbereiche wie folgt schreiben:

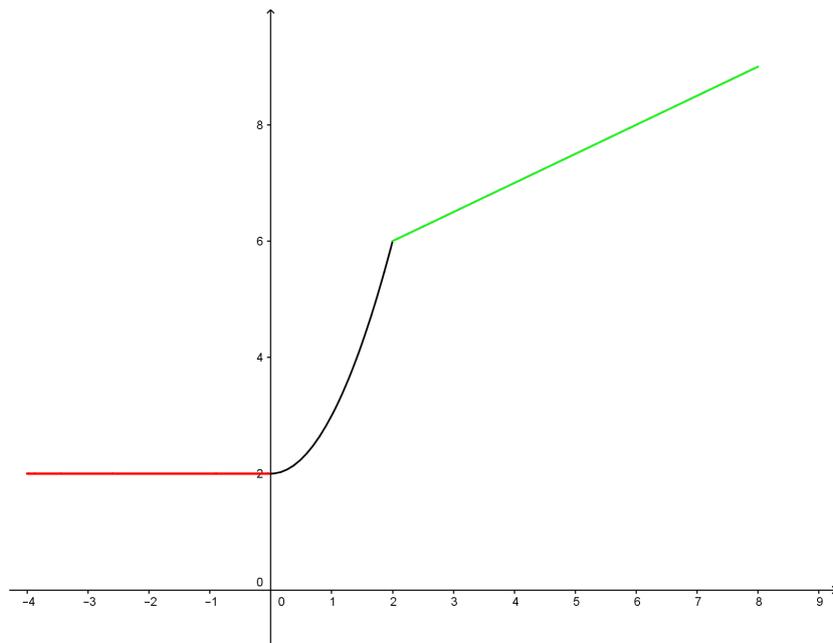
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \end{aligned}$$

und an dieser vollständigen Schreibweise erkennt man sofort den Unterschied zwischen den Funktionen f und g .

Beispiel 1.2 Funktionen können auch stückweise definiert werden. Ein Beispiel ist die Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 5 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



2 Der Graph einer Funktion

Wir beschränken uns hier auf Funktionen, deren Definitionsbereich $X = \mathbb{R}$ (oder $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und deren Wertebereich $Y = \mathbb{R}$ ist.

Sei die Funktion

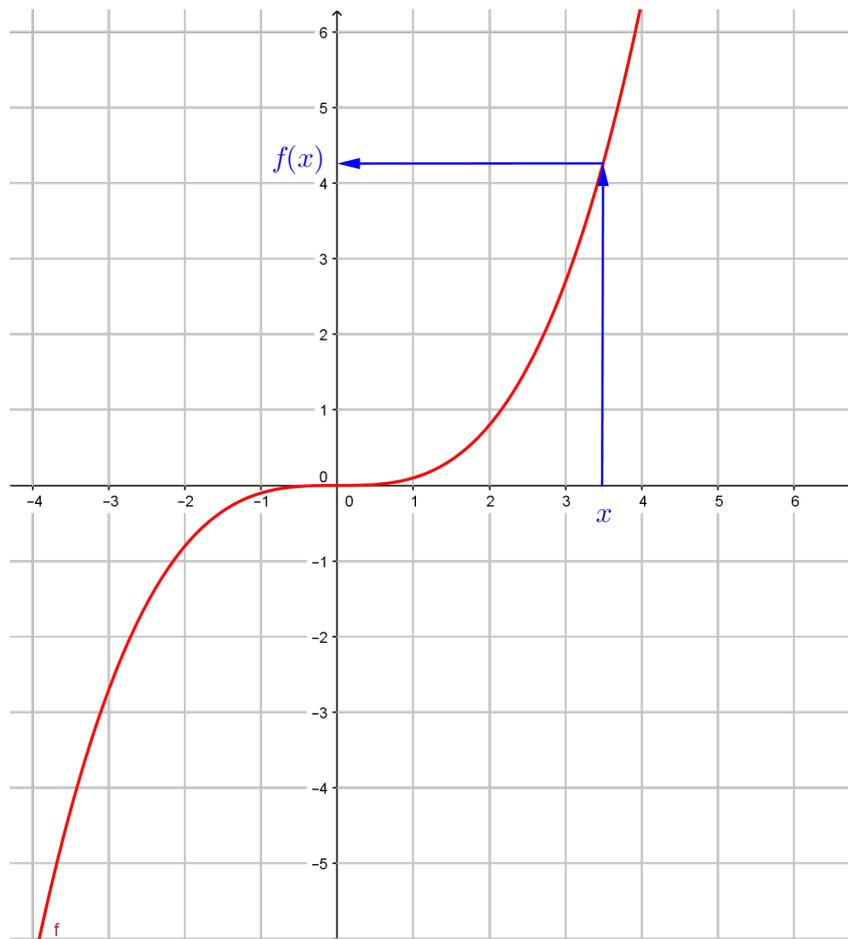
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

gegeben, so zeichnet man für jedes $x \in \mathbb{R}$ in der $x - y$ -Ebene einen Punkt mit den Koordinaten $(x, f(x))$.

Formal und ganz allgemein lässt sich der Graph von f als Teilmenge des kartesischen Produktes der beiden Mengen X und Y schreiben:

$$\text{Graph}(f) := \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

Zudem kann man am Graphen von f auch die Zuordnungsvorschrift der Funktion erkennen.



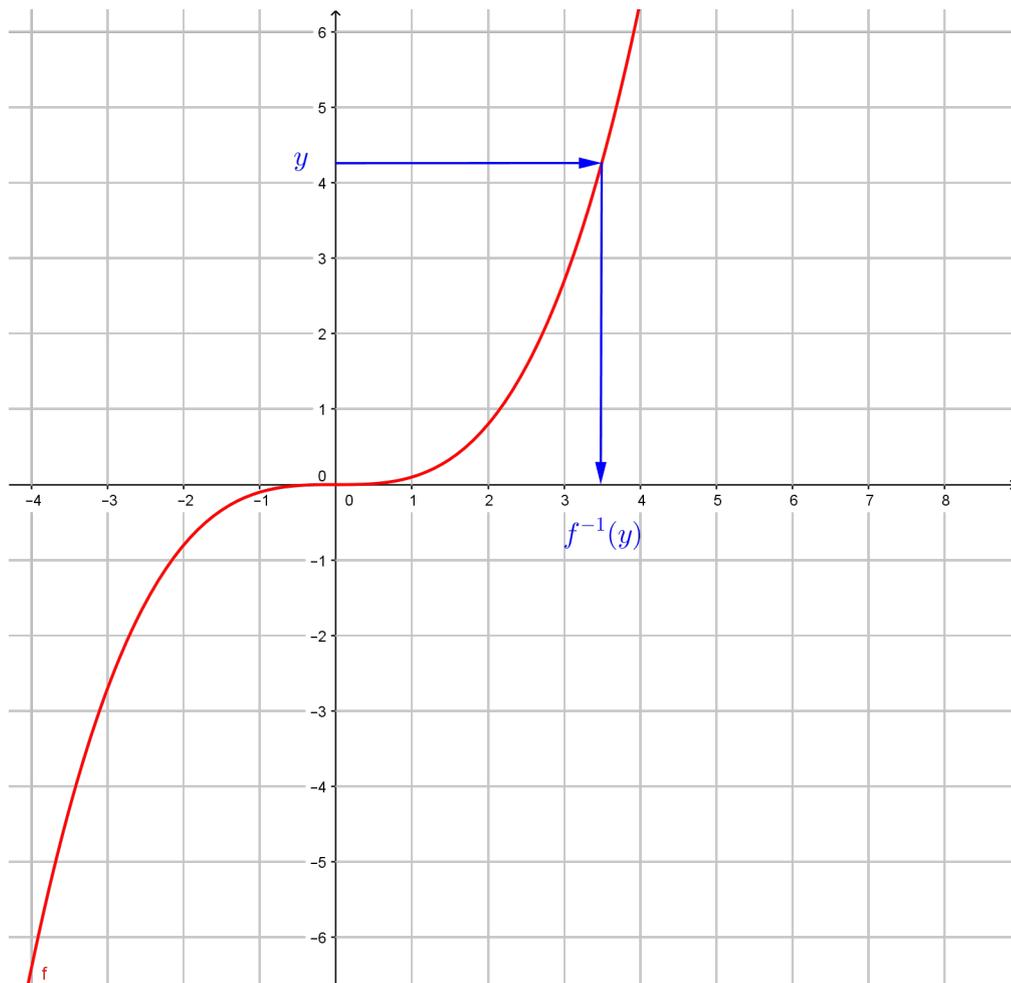
3 Umkehrbarkeit

Eine Funktion ordnet jedem Wert x des Definitionsbereichs **genau einen** Wert y des Wertebereichs zu. Es ist aber durchaus erlaubt, dass verschiedene x -Werte auf den selben y -Wert abgebildet werden. Schon an einfachen Beispielen kann man erkennen:

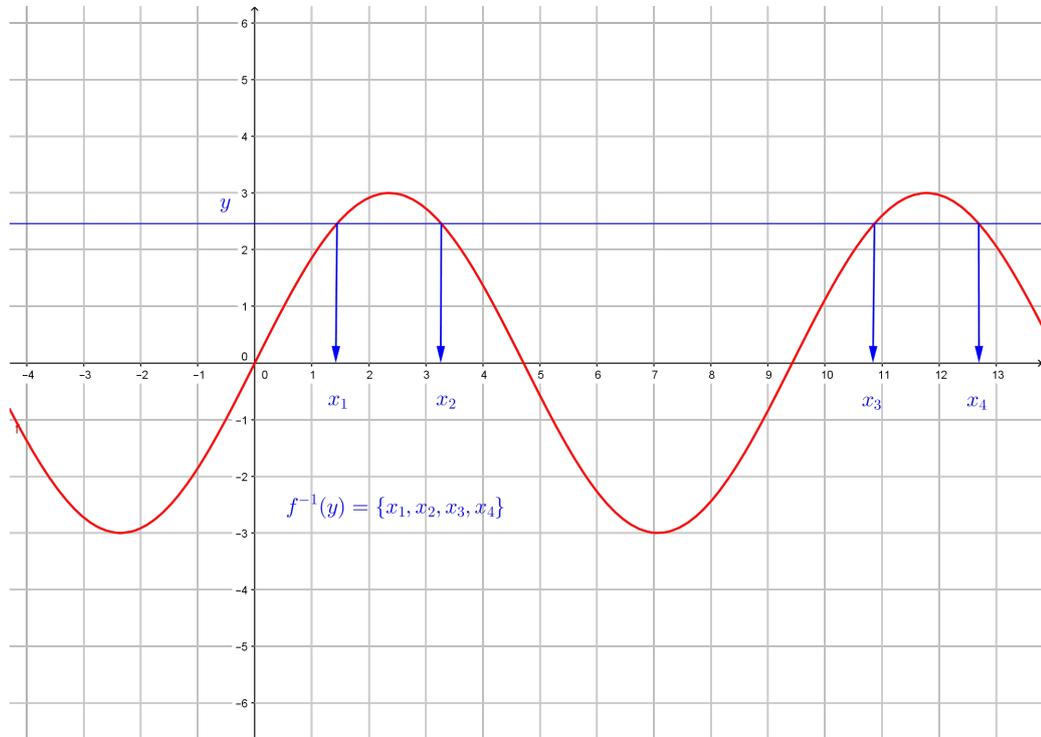
Nicht jede Funktion ist umkehrbar!

Man nennt Funktionen, bei denen die Umkehrung der zugrunde liegenden Zuordnung wieder eine Funktion ist, umkehrbare Funktionen. Eine umkehrbare Funktion hat also die Eigenschaft, dass keine zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das selbe Element des Wertebereichs abgebildet werden. Auch am Graphen einer reellen Funktion kann man die Umkehrung der Funktion f , bzw. die eventuell auftretenden Probleme beim Umkehren, visualisieren

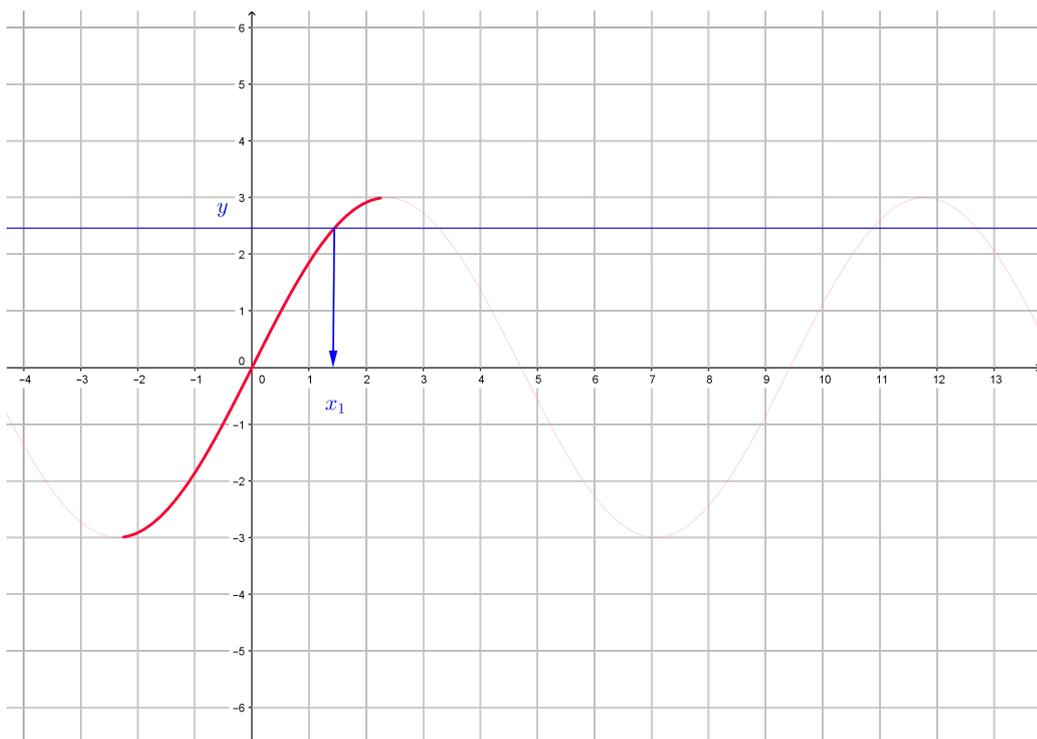
- Bei dieser Funktion funktioniert das Umkehren problemlos. Jedem y kann **genau ein** x mit $f(x) = y$ zugeordnet werden.



- Bei dieser Funktion kann für den Punkt y kein **eindeutig** bestimmtes x mit $f(x) = y$ gefunden werden. Es gibt hier (mindestens) vier Kandidaten und diese Funktion ist somit nicht eindeutig, also **nicht** umkehrbar.



Das ist ein typisches Vorgehen, durch geschicktes Verkleinern des Definitionsbereichs auf Monotonieintervalle kann man die Umkehrbarkeit „einer Funktion“ erreichen.



Definition 3.1

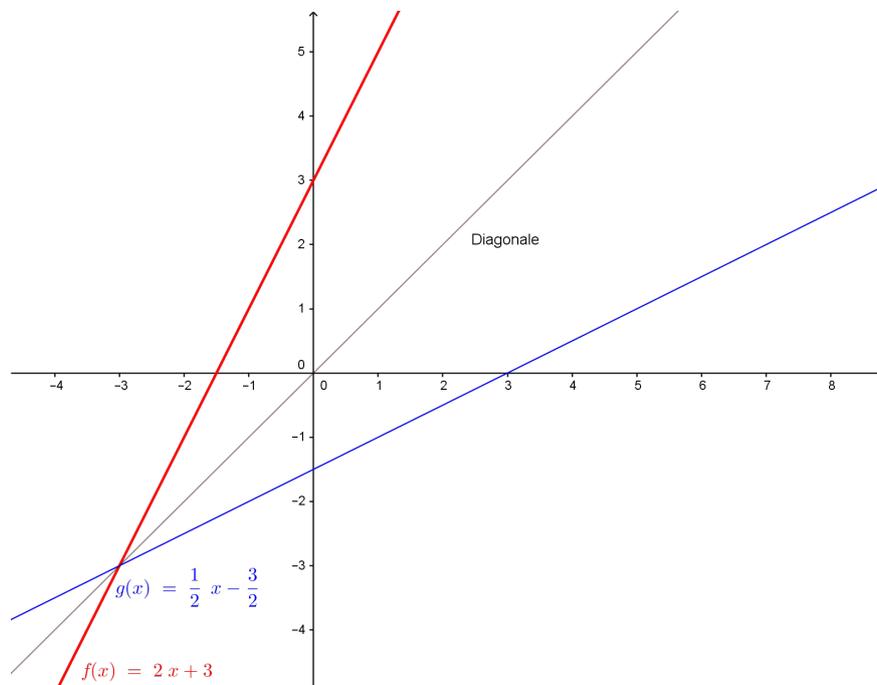
Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion und $M \subset X$. Dann heißt f umkehrbar auf M , wenn jedes $y \in f(M)$ nur von genau einem Element aus M getroffen wird. Also: Für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt (muss gelten) $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Funktion, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das in diesem Fall **eindeutige** x zuordnet, heißt Umkehrfunktion.

Bezeichnung:

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(M) &\longrightarrow M \\ y = f(x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Beispiel 3.1 Die Funktion $y = f(x) = 2x + 3$ ist auf ganz \mathbb{R} definiert und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion erhält man hier, in dem man die Gleichung $y = 2x + 3$ nach x auflöst: $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.

Meist tauscht man noch die Variablen x und y , damit man die beiden Funktionen problemlos im selben Koordinatensystem zeichnen kann.



Bemerkungen

1. Wendet man auf ein x zunächst eine umkehrbare Funktion f an und danach die Umkehrfunktion f^{-1} (auf $f(x)$), so erhält man wieder x zurück.

$f^{-1}(f(x)) = x$	$f(f^{-1}(y)) = y$
--------------------	--------------------

2. Den Graphen von f^{-1} erhält man, indem man den Graphen von f an der Geraden $y = x$ (Diagonale) spiegelt.
3. Am Graphen einer Funktion ist leicht zu erkennen, ob die Funktion umkehrbar ist. f ist genau dann umkehrbar, wenn **jede** Parallele zur x -Achse den Graphen in **höchstens** einem Punkt schneidet.

4 Wichtige Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion, deren Graph über dem gesamten Definitionsbereich mit wachsendem x ansteigt (oder abfällt) ist nach der letzten Bemerkung im vorhergehenden Kapitel umkehrbar. Solche Funktionen heissen auch monoton. Genauer gilt:

Definition 4.1 *Eine Funktion heisst*

monoton steigend falls gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$

streng monoton steigend falls gilt $f(x_1) < f(x_2)$

monoton fallend falls gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$

streng monoton fallend falls gilt $f(x_1) > f(x_2)$

für alle Paare $x_1 < x_2$.

Definition 4.2 *Eine Funktion heisst*

gerade falls $f(-x) = f(x)$ für alle x

ungerade falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x

Die zwei typischen Beispiele für gerade und ungerade Funktionen sind \sin (ungerade) und \cos (grade). Geometrisch kann man beide Begriffe wie folgt deuten:

- gerade: Graph der Funktion kann durch Spiegelung an der y -Achse in sich überführt werden.
- ungerade: Graph der Funktion kann durch Spiegelung am 0-Punkt in sich überführt werden.

Definition 4.3 *Eine Funktion heisst*

nach oben beschränkt falls es eine Zahl M gibt, so dass $f(x) \leq M$ für alle x

nach unten beschränkt falls es eine Zahl m gibt, so dass $f(x) \geq m$ für alle x

beschränkt falls f nach oben **und** unten beschränkt ist

5 Komposition von Funktionen

Seien

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow Y \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

zwei Funktionen, so dass der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f enthalten ist. Dann kann man aus beiden Funktionen die so genannte zusammengesetzte Funktion oder Komposition von f und g bilden:

$$\begin{aligned} F = f \circ g : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

Natürlich ist F auf dem Definitionsbereich von g definiert.

Es gilt ausserdem:

Sind f und g umkehrbar, so ist auch die Komposition $f \circ g$ umkehrbar und es gilt

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Beispiel 5.1 *Die Funktion*

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

kann als Komposition der folgenden Funktionen betrachtet werden:

- $u = f_1(x) = x^2$, das Element x wird quadriert.
- $v = f_2(u) = u + 4$, zum Ergebnis wird 4 addiert.
- $w = f_3(v) = 1/v$, der Kehrwert wird gebildet.
- $y = f_4(w) = 3 \cdot w$, das Ergebnis wird mit 3 multipliziert.

Also kann f wie folgt geschrieben werden:

$$f(x) = f_4(\underbrace{f_3(\underbrace{f_2(\underbrace{f_1(x)}_u)}_v)}_w)_y$$

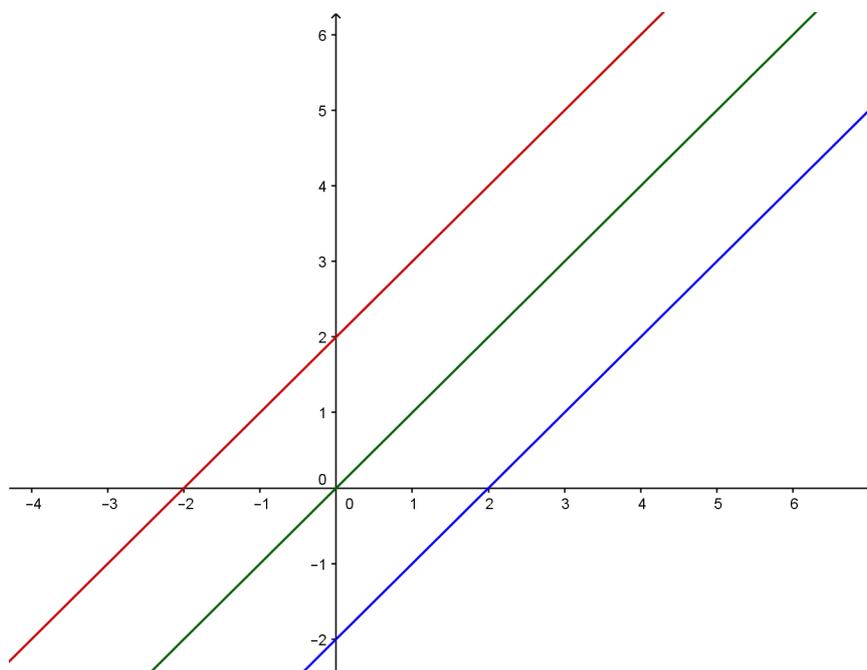
6 Einfache elementare Funktionen

6.1 Translationen

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Die Funktion

$$\begin{aligned} t_c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + c \end{aligned}$$

heißt Translation oder Verschiebung um c . Die Graphen der Translationen für $c = -2, 0, 2$ sind in der folgenden Skizze dargestellt.



Sei f eine beliebige Funktion und c eine reelle Zahl. Dann können wir die Komposition(en) von f mit der Translation t_c betrachten. Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu tun.

- $t_c \circ f : x \longmapsto f(x) + c$

Der Graph von $t_c \circ f$ entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um c Einheiten in Richtung der y -Achse.

Dabei bedeuten positive c eine Verschiebung nach oben.

- $f \circ t_c : x \longmapsto f(x + c)$

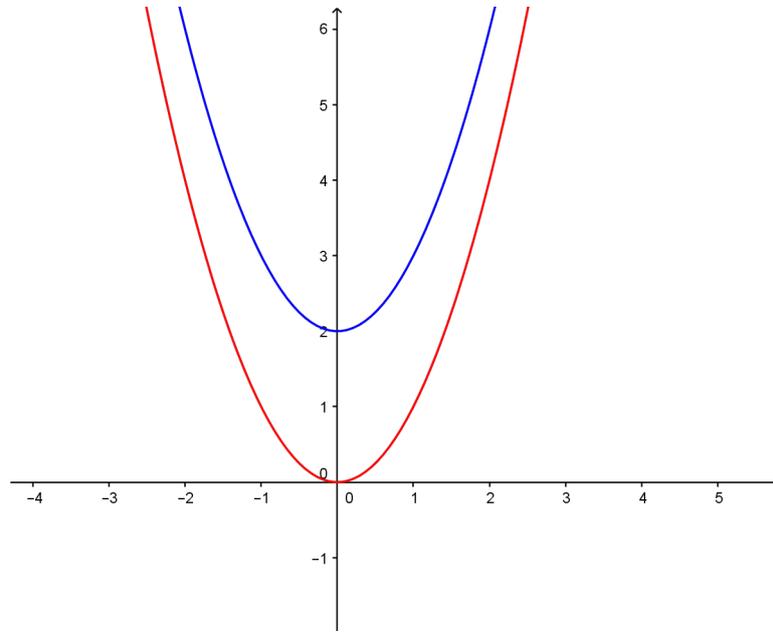
Der Graph von $f \circ t_c$ entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um $-c$ Einheiten in Richtung der x -Achse. Dabei bedeuten positive c eine Verschiebung nach **links**.

Beispiel

Sei $c = 2$ und $f(x) = x^2$. Dann ist

$$t_2 \circ f : x \mapsto x^2 + 2$$

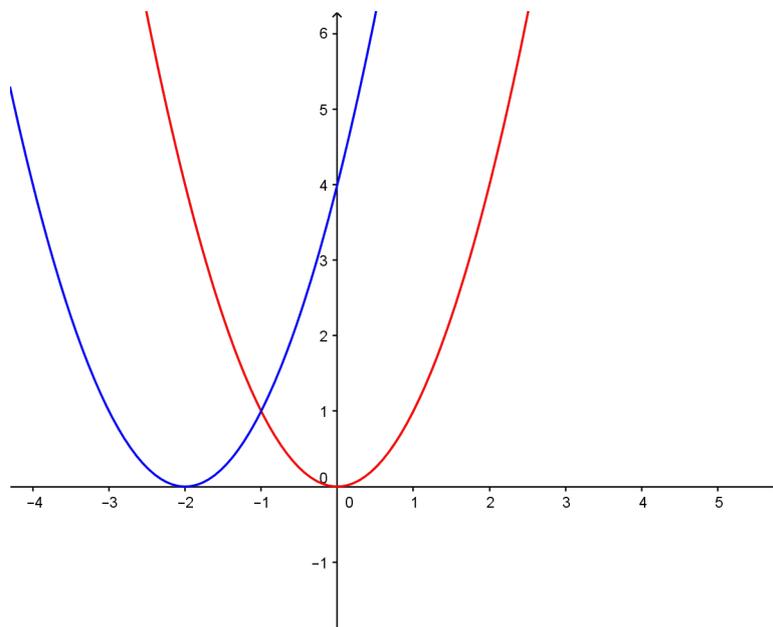
und der Graph von $t_2 \circ f$ entsteht durch Anheben des Graphen von f um 2 Einheiten.



Kehren wir die Reihenfolge um, so gilt

$$f \circ t_2 : x \mapsto (x + 2)^2.$$

Wie sieht der Graph dieser Funktion aus? Er entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 2 Einheiten nach **links**!

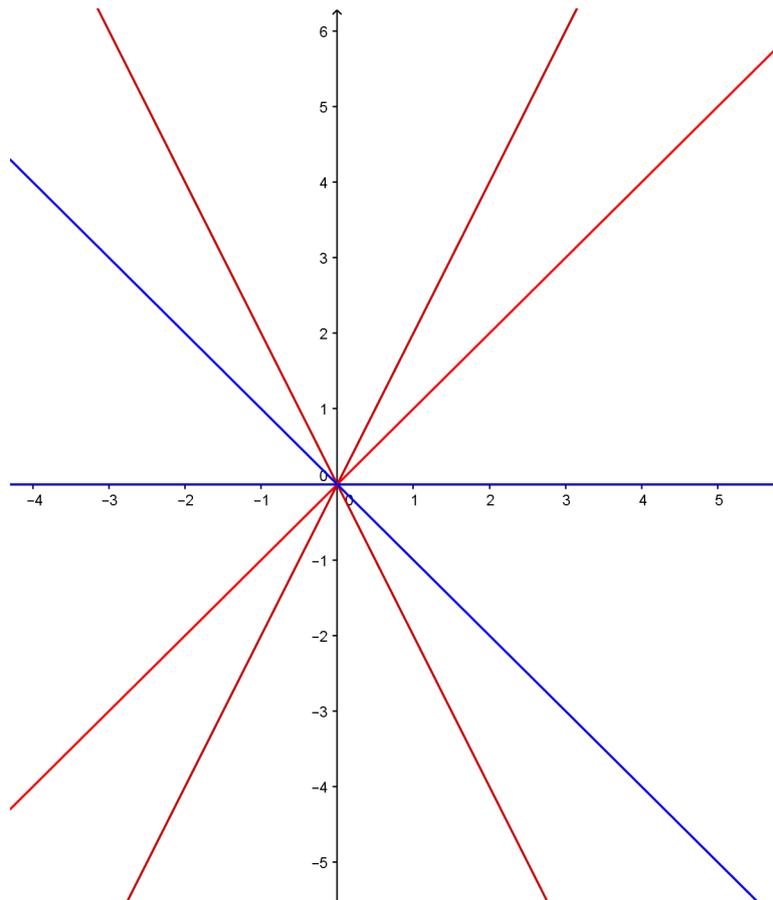


6.2 Skalierungen

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Die Funktion

$$\begin{aligned} s_c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \cdot x \end{aligned}$$

heißt Skalierung mit der Konstanten c . Die Graphen der Skalierungen für $c = -2, -1, 0, 1, 2$ sind in der folgenden Skizze dargestellt.



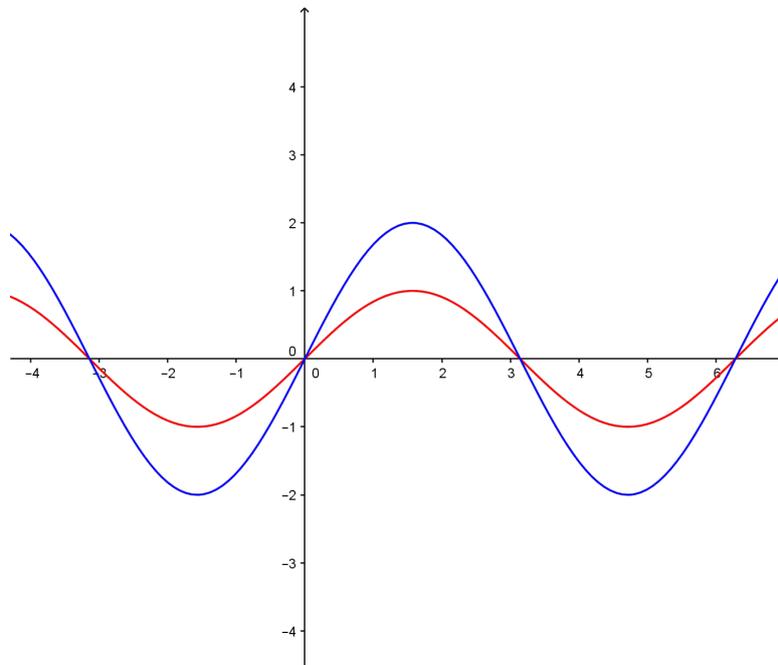
Eine Skalierung bedeutet zunächst nichts anderes als eine Änderung der Skala (oder des Massstabs) und je nach dem wie man eine Skalierung mit einer Funktion komponiert, ändert sich der Massstab auf der x - bzw. y -Achse.

Beispiel:

Sei $c = 2$ und $f(x) = \sin(x)$. Dann ist

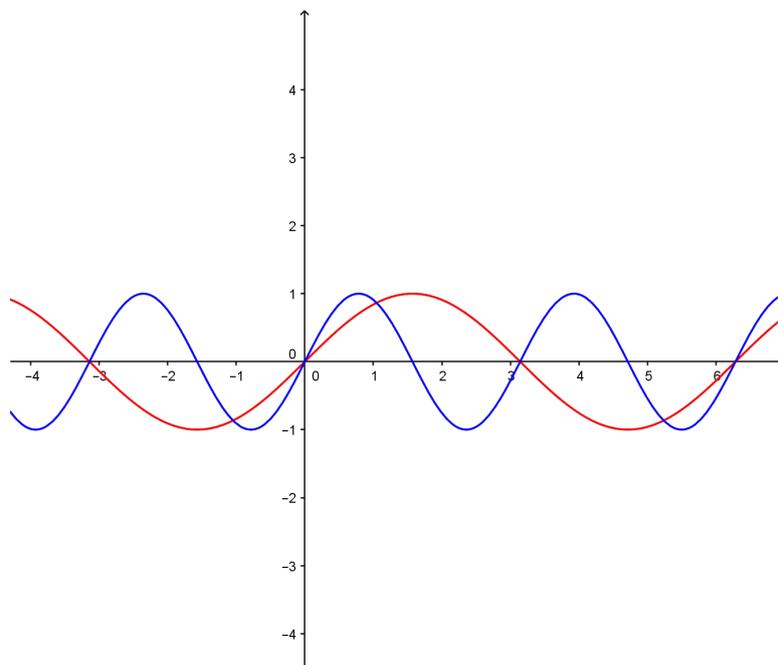
$$s_2 \circ f : x \mapsto 2 \cdot \sin(x)$$

und der Graph von $s_2 \circ f$ (blau) entsteht aus dem Graphen von f (rot), indem jeder y -Wert verdoppelt wird.



Kehren wir die Reihenfolge um, so gilt

$$f \circ s_2 : x \mapsto \sin(2 \cdot x).$$



Hier verdoppelt sich die „Durchlaufgeschwindigkeit“, d.h. der neue Graph (blau) durchläuft 2 ganze Perioden, wenn der alte Graph (rot) nur eine Periode durchläuft.

6.3 Die Wurzelfunktion

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Ist f umkehrbar? Nein, denn z.B. gilt $f(-2) = f(2) = (-2)^2 = 2^2 = 4$ und der Wert 4 wird von f (genau) zweimal getroffen. Somit weiss man nicht, welchen Wert man bei der Konstruktion der Umkehrfunktion der 4 zuordnen sollte, 2 oder -2 ?

Verkleinern wir deshalb den Definitionsbereich von f (so wenig wie möglich)! Indem wir die Quadratfunktion nur auf dem positiven Teil der x -Achse betrachten, erhalten wir die umkehrbare Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir nun auf alle Potenzfunktionen.

Definition 6.1 Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} := \sqrt[n]{\cdot}$ wird als Wurzelfunktion bezeichnet:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen heisst Radikand.

Rechnen mit Wurzeln

Die Rechenregeln für Potenzen

1.	$a^r \cdot a^s$	$=$	a^{r+s}
2.	$\frac{a^r}{a^s}$	$=$	a^{r-s}
3.	$(a^r)^s$	$=$	$(a^s)^r = a^{r \cdot s}$

lassen sich mit der Entsprechung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ direkt auf Wurzeln übertragen. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$\sqrt[n]{x^m}$	$=$	$(x^m)^{\frac{1}{n}}$	$=$	$x^{\frac{m}{n}}$
$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$	$=$	$x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}}$	$=$	$(x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$	$=$	$(x^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}$	$=$	$x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$
$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$=$	$\frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$	$=$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

6.4 Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a_n \neq 0$. Dann heisst die Funktion

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

oder kurz $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ein Polynom vom Grad n . Die Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n heissen die Koeffizienten von p .

6.4.1 Polynome vom Grad 0

Ein Polynom vom Grad 0 ist eine konstante Funktion $p(x) = a_0 \in \mathbb{R}$. Ihr Graph ist eine Parallele zur x -Achse.

6.4.2 Polynome vom Grad 1

Ein Polynom vom Grad 1 hat die Gestalt

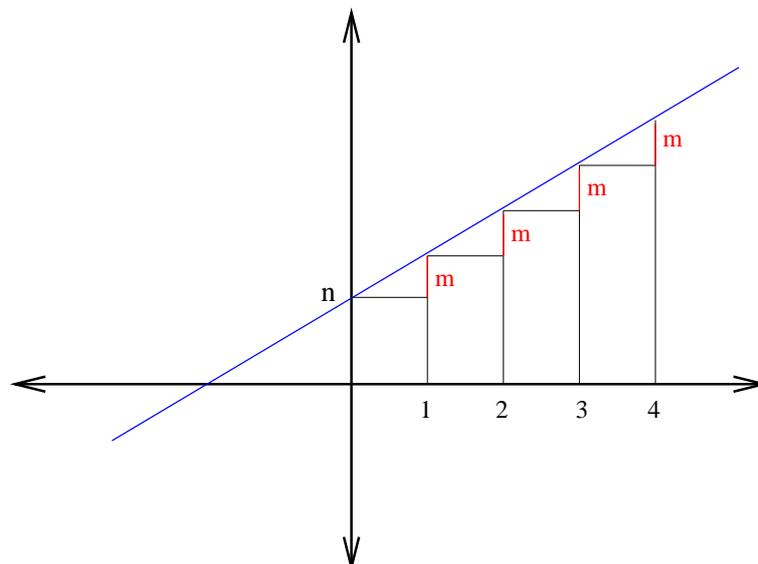
$$p(x) = a_0 + a_1x = mx + n.$$

Wir haben dabei die gebräuchlichere Schreibweise mit den reellen Zahlen m und n gewählt. Der Graph von p ist eine Gerade und diese Gerade schneidet die y -Achse (d.h. es gilt $x = 0$) bei $p(0) = n$.

Falls der Wert von p (für irgend ein x) um 1 erhöht wird, gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} p(x+1) &= m(x+1) + n \\ &= mx + n + m \\ &= p(x) + m, \end{aligned}$$

d.h. der Wert von p erhöht sich unabhängig vom gewählten x -Wert um m .



6.4.3 Polynome vom Grad 2

Ein Polynom vom Grad 2 hat die Gestalt

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = ax^2 + bx + c.$$

Wir haben dabei die gebräuchlichere Schreibweise mit den reellen Zahlen a , b und c gewählt. Der Graph von p ist eine sogenannte Parabel, die die y -Achse im Punkt c schneidet. Zunächst gilt (Probe machen!)

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Aus dieser Darstellung, die auch als Scheiteldarstellung bezeichnet wird, können wir viele Informationen über p direkt ablesen.

- Nehmen wir zunächst an, dass $\overline{a > 0}$ ist. Dann gilt

$$p(x) = \underbrace{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} - \frac{b^2}{4a} + c \geq c - \frac{b^2}{4a},$$

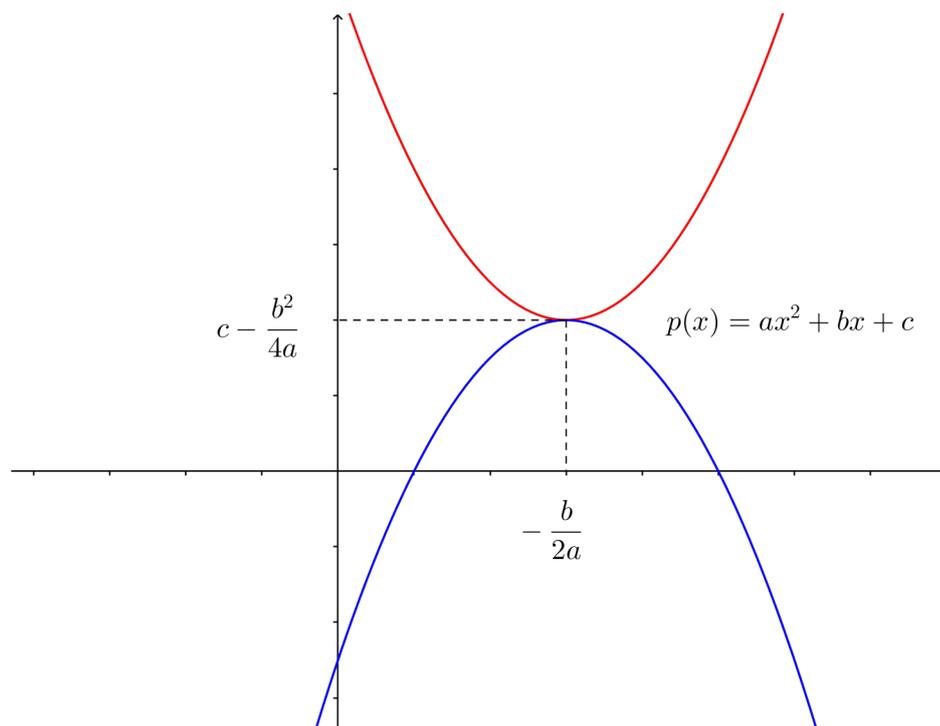
d.h. $p(x)$ ist für **jeden** Funktionswert x grösser oder gleich der Zahl $c - \frac{b^2}{4a}$.

Der tiefste Punkt ist natürlich dort, wo der erste Summand verschwindet, also Null wird, was natürlich genau für $x = -\frac{b}{2a}$ geschieht.

Der tiefste Punkt der Parabel, der sogenannte Scheitel, hat somit die Koordinaten

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

- Falls $\overline{a < 0}$ hat die Parabel den selben Scheitelpunkt wie im vorhergehenden Fall, allerdings ist der hier der höchste Punkt der nach unten geöffneten Parabel.



Beispiel 6.1 Wir wollen den Scheitelpunkt der Parabel $p(x) = 3x^2 - 12x + 19$ bestimmen. Wir sehen sofort, dass $a = 3$, $b = -12$ und $c = 19$ gilt und erhalten mit der obigen Gleichung für den Scheitelpunkt

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-12}{2 \cdot 3}, 19 - \frac{(-12)^2}{4 \cdot 3}\right) = (2, 7)$$

Zur Übung wollen wir noch die Scheitelgleichung dieses quadratischen Polynoms konstruieren, indem wir quadratisch ergänzen.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 - 12x + 19 \\ &= 3 \left(x^2 - 4x + \frac{19}{3} \right) \\ &= 3 \left(x^2 - 4x + (-2)^2 - (-2)^2 + \frac{19}{3} \right) \\ &= 3 \left((x - 2)^2 - 4 + \frac{19}{3} \right) \\ &= 3(x - 2)^2 + 7. \end{aligned}$$

6.5 Rationale Funktionen

Seien p und q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist. Dann heisst die Funktion f , die durch

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

gegeben ist, rationale Funktion. Der Definitionsbereich des Zähler- und Nennerpolynoms ist ganz \mathbb{R} , d.h. die rationale Funktion f ist überall dort definiert, wo das Nennerpolynom **nicht** Null ist:

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0 \}.$$

Polynomdivision Ein wichtiges Hilfsmittel beim Umgang mit rationalen Funktionen ist die sogenannte Polynomdivision.

Dabei muss zunächst stets der Grad von p grösser oder gleich dem Grad von q sein. In Analogie zur Division mit Rest von zwei ganzen Zahlen kann man auch rationale Funktionen durch dieses Verfahren vereinfachen.

Beispiel zur Division mit Rest

Wir wollen die Division $\frac{153}{13} = 153 : 13$ mit Rest ausführen. Man errechnet:

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 3 \ : \ 1 \ 3 \ = \ 1 \ 1 \\ \underline{1 \ 3} \\ 2 \ 3 \\ \underline{1 \ 3} \\ 1 \ 0 \end{array}$$

Also gilt:

$$\frac{153}{13} = 11 \text{ Rest } 10 = 11 + \frac{10}{13}$$

Beispiel zur Polynomdivision

Wir wollen die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1}$$

durch Polynomdivision vereinfachen und werden das Verfahren schrittweise erläutern.

1. Zunächst ergänzen wir alle „fehlenden“ Glieder im Zähler- und Nennerpolynom (und versehen diese Glieder mit dem Koeffizient 0). Dann schreiben wir den Bruchstrich als Division. Wir erhalten:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} = (x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + \underbrace{0x}_{=0} + 1).$$

2. Wir nehmen das 1. Glied von p (d.h. x^3) und dividieren es durch das 1. Glied von q (d.h. x^2) und erhalten $\frac{x^3}{x^2} = x$. Dieses Ergebnis wird rechts vom Gleichheitszeichen notiert. Wir erhalten als vorübergehendes Resultat in unserem Rechenschema:

$$(x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + 0x + 1) = x$$

3. Dieser erste Term rechts vom Gleichheitszeichen wird nun mit q multipliziert und das Ergebnis dieser Multiplikation $(x^2 + 0x + 1) \cdot x = x^3 + 0x^2 + x$ von links beginnend unter p geschrieben:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + 0x + 1) = x \\ x^3 + 0x^2 + x \end{array}$$

4. Nun wird dieses Ergebnis vom unmittelbar darüber stehenden Teil des Polynoms p subtrahiert $(x^3 + 2x^2 + 5x) - (x^3 + 0x^2 + x) = 2x^2 + 5x$. Dieses Ergebnis wird nun wieder im Divisionsschema (an richtiger Stelle) eingetragen:

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + 0x + 1) = x \\ x^3 + 0x^2 + x \\ \hline 2x^2 + 4x \end{array}$$

5. Zu diesem Term kommt nun noch der nächste bisher ungenutzte Term aus dem Polynom p hinzu, das ist hier die 2.

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + 0x + 1) = x \\ x^3 + 0x^2 + x \\ \hline 2x^2 + 4x + 2 \end{array}$$

6. Nun wird das Verfahren, beginnend bei Schritt 2. mit dem neuen Polynom $2x^2 + 4x + 2$ und dem alten Polynom q wiederholt. Man teilt also den 1. Summanden dieses neuen Polynoms ($2x^2$) durch den 1. Summanden von q (x^2) und erhält $2x^2 : x^2 = 2$. Dieses Ergebnis wird unser neues Glied rechts vom Gleichheitszeichen.

Man erhält also nach Abarbeitung der Schritte 2. - 4. :

$$\begin{array}{r}
 (\begin{array}{cccc} x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 \end{array}) : (\begin{array}{ccc} x^2 & + & 0x & + & 1 \end{array}) = x + 2 \\
 \begin{array}{cccc} x^3 & + & 0x^2 & + & x \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccc} 2x^2 & + & 4x & + & 2 \\
 2x^2 & + & 0x & + & 2 \\
 \hline
 4x
 \end{array}
 \end{array}$$

Hier sind wir nun fertig, denn $4x$ kann nicht weiter durch x^2 geteilt werden. Der Rest der Polynomdivision ist somit $4x$ und man erhält:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} = x + 2 \quad \text{Rest } 4x = x + 2 + \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

7 Aufgaben

- Gemäss den Richtlinien für die Schweizerische Maturitätsprüfung in Mathematik (normales Niveau) können Sie die folgenden so genannten elementaren Funktionen beschreiben und erkennen: konstante Funktion, Identität, lineare Funktion, Quadratwurzelfunktion, Potenzfunktion, Betragsfunktion, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , a^x , $\ln(x)$ und $\log_a(x)$. Können Sie von diesen Funktionen, **ohne** einen Taschenrechner zu benutzen, eine (grobe, aber qualitativ richtige) Skizze anfertigen?
- Geben Sie den grösstmöglichen Definitionsbereich $D(f) \subset \mathbb{R}$ für die Funktionen an.

$$a) \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$$

$$b) \quad f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$c) \quad f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

- Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Monotonie und begründen Sie Ihre Aussage.

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{5} x^5$$

$$b) \quad f(x) = \ln(x^3) \quad x > 0$$

$$c) \quad f(x) = \frac{2}{x^2} \quad x > 0$$

$$d) \quad f(x) = 2 - \frac{2}{x} \quad x > 0$$

- Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Welche Eigenschaften haben diese Funktionen?

$$a) \quad f(x) = x^3$$

$$b) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$$

$$c) \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad x \neq -1$$

$$d) \quad f(x) = |x-1| \quad x > 0$$

$$e) \quad f(x) = (x-1)^2$$

$$f) \quad f(x) = 3 - \frac{2}{x} \quad x > 0$$

5. Geben Sie für die Funktion

$$f(x) = 2e^{-x} + 3$$

den Definitions- und Wertebereich an, berechnen Sie die Umkehrfunktion zu f und geben Sie auch deren Definitions- und Wertebereich an.

6. Bestimmen Sie $f \circ f \circ f$, wenn

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

mit $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ (reelle Zahlen ausser 0 und 1) ist. Was ist der maximale Definitionsbereich der Komposition?

$$\text{Hinweis: } f \circ f \circ f(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = ?$$

7. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen (jede Teilaufgabe im selben Koordinatensystem). Kontrollieren Sie Ihre Skizzen mit Geogebra.

(a)

$$f_1(x) := x^3$$

$$f_2(x) := (x+2)^3$$

$$f_3(x) := x^3 - 3$$

$$f_4(x) := (x+1)^3 - 1$$

$$f_5(x) := 2x^3$$

(b)

$$f_1(x) := \frac{1}{x}$$

$$f_2(x) := \frac{1}{x-1}$$

$$f_3(x) := \frac{1}{x+1}$$

$$f_4(x) := \frac{1}{x-1} + 2$$

$$f_5(x) := \frac{1}{x+1} + 2$$

(c)

$$f_1(x) := |x|$$

$$f_2(x) := |x + 1|$$

$$f_3(x) := |x| + 1$$

$$f_4(x) := 2|x|$$

$$f_5(x) := |2x|$$

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Bei rationalen Ausdrücken soll die Vereinfachung dabei so erfolgen, dass im Nenner keine Wurzeln mehr vorkommen.

$$a) \quad \sqrt[5]{x^7 y^3 (2y)^{13}}$$

$$b) \quad \sqrt[4]{x^{-3} \sqrt{x^2 y^3} y^3 (5y)^3}$$

$$c) \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$$

$$d) \quad \frac{2 + 3\sqrt{5}}{4 - \sqrt{15}}$$

9. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Bei rationalen Ausdrücken soll die Vereinfachung dabei so erfolgen, dass im Nenner keine Wurzeln mehr vorkommen.

$$a) \quad \sqrt[3]{x^6 (2y)^{12}}$$

$$b) \quad \sqrt[2]{\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{y}}$$

$$c) \quad \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

10. Lösen Sie nach x auf.

$$a) \quad y = \frac{\sqrt{x+1} + 5}{\sqrt{x+1} - 3}$$

$$b) \quad y = 5^{3x-1} + 7$$

11. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der folgenden Parabeln.

$$a) \quad f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$b) \quad f(x) = 4x^2 + 56x + 196$$

$$c) \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2}$$

12. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten. Diese Aufgabe **kann** durch Polynomdivision gelöst werden, muss aber nicht.

$$(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2) : (x - 1) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$$

$$(x^7 - 4x^5 + x^2 + x - 2) : (x + 2) = x^6 - 2x^5 + x - 1$$

$$(x^4 - x^3 - 2) : (x^2 - 2) = x^2 - x + 2 + \frac{-2x + 2}{x^2 - 2}$$

8 Lösungen der Aufgaben

1. -
2. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \text{ und } x \neq 2\}$,
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$,
c) $D(f) = (-2, 0]$
3. a) streng monoton wachsend ,
b) streng monoton wachsend ,
c) streng monoton fallend,
d) streng monoton wachsend
4. a) unbeschränkt, streng monoton wachsend und ungerade
b) nach unten beschränkt, streng monoton wachsend
c) unbeschränkt
d) nach unten beschränkt
e) nach unten beschränkt
f) nach oben beschränkt, streng monoton wachsend
5. $D(f) = \mathbb{R}$, $W(f) = (3, \infty)$
 $f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$, $D(f^{-1}) = (3, \infty)$, $W(f^{-1}) = \mathbb{R}$
6. $(f \circ f \circ f)(x) = x$ mit $D(f \circ f \circ f) = \mathbb{R}$
Man sollte aber besser sagen, dass $(f \circ f \circ f)(x) = x$ für alle $x \neq 0, 1$ gilt.
7. -
8. a) $4 \cdot 8^{1/5} \cdot (x^7 \cdot y^{16})^{1/5}$ oder $2^{13/5} \cdot x^{7/5} \cdot y^{16/5}$,
b) $5^{3/4} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{15/8}$,
c) $-\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$,
d) $8 + 15\sqrt{3} + 12\sqrt{5} + 2\sqrt{15}$
9. a) $16x^2y^4$,
b) $\sqrt[8]{x}\sqrt[6]{y}$,
c) $\sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{1}{3}(\sqrt{35} + \sqrt{14})$
10. a) $x = \left(\frac{3y+5}{y-1}\right)^2 - 1$,
b) $x = \frac{1}{3} \left(\frac{\ln(y-7)}{\ln(5)} + 1\right)$
11. a) $(2, -2)$
b) $(-7, 0)$
c) $(-2, -9/2)$
12. -