Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs — **Gleichungen und Ungleichungen**
Dr. Thomas Zehrt

Inhaltsverzeichnis

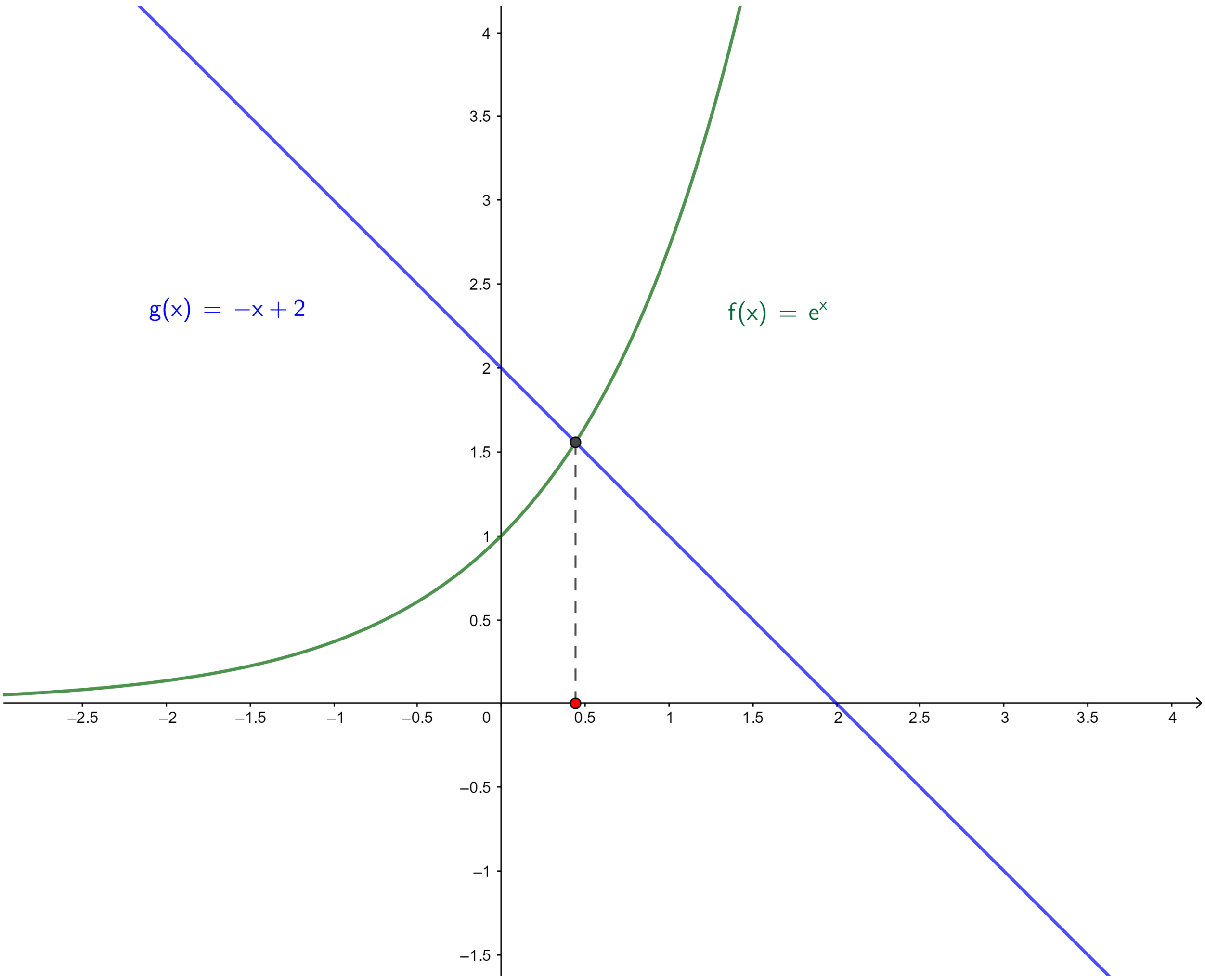
1 Gleichungen

1.1 Grundlegendes

Dadurch dass in der Schule jede gestellte Aufgabe (zumindest vom Lehrer) exakt gelöst werden kann, entsteht der Eindruck, dass jede Gleichung exakt lösbar ist. Dieser Eindruck ist **falsch**! Im Gegenteil! Schon solch einfache Gleichungen wie

$$e^x \quad = \quad 2 - x$$

können **nicht** exakt gelöst werden (d.h. nach x aufgelöst werden). Natürlich hat diese Gleichung genau eine Lösung, was man der Skizze entnehmen kann.



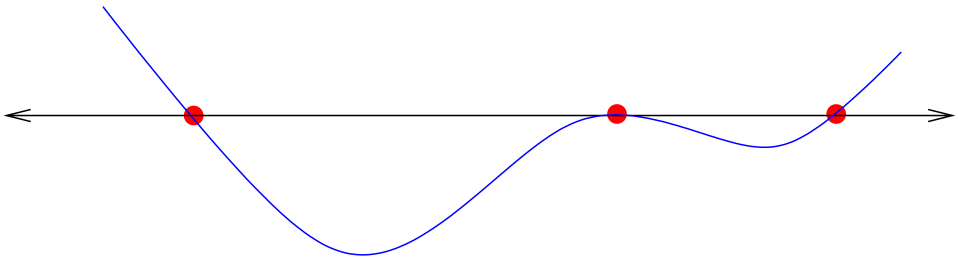
Definition 1.1 *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Unter einer Gleichung mit einer Unbekannten versteht man eine Aussageform vom Typ*

$$f(x) \quad = \quad 0.$$

Ein $x \in D$ mit $f(x) = 0$ heisst Nullstelle von f. Die Lösungsmenge der Gleichung ist

$$\mathbb{L} \quad := \quad \{x \in D \ : \ f(x) = 0\}.$$

Die Lösung einer Gleichung vom Typ $f(x) = 0$ entspricht der Suche nach allen Nullstellen der Funktion f, d.h. wir suchen alle Durchstosspunkte des Graphen von f durch die x-Achse.



In der ökonomischen Praxis werden allerdings oft Aussageformen vom Typ $f(x) = g(x)$ mit Funktionen f und g betrachtet, d.h. wir suchen alle Schnittpunkte x der Graphen von f und g.

Allerdings sind diese Aussageformen stets äquivalent zu einem Nullstellenproblem, denn es gilt

$$f(x) = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad h(x) := f(x) - g(x) = 0.$$

Die Suche nach einem Schnittpunkt der Graphen von f und g entspricht also der Suche nach Nullstellen der (neuen) Funktion h (und umgekehrt). Wir benötigen somit keine andere Lösungstheorie!

Beispiele:

- $f(x) = x + 5 = 0 \qquad \mathbb{L} = \{-5\}$
- $f(x) = x^2 - 4 = 0 \qquad \mathbb{L} = \{-2, 2\}$
- $f(x) = \sin(x^2) + \ln(x) + 13 = 0 \qquad \mathbb{L} = \{?\}$
- Gegeben seien die beiden Funktionen

  $$f(x) = x^2 - 2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^3 - 3x.$$

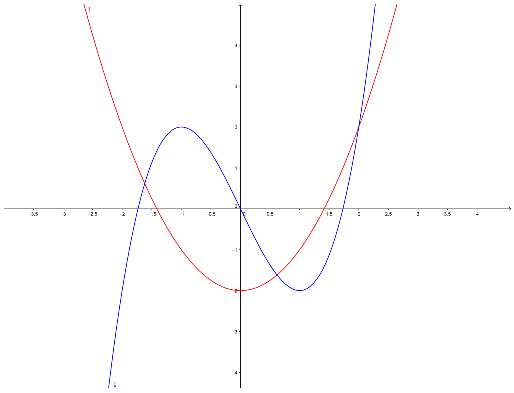
  Wir suchen alle Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$, d.h. wir suchen alle Werte x für die

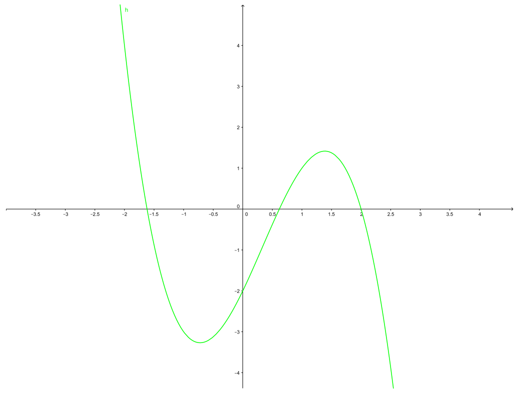
  $$x^2 - 2 \quad = \quad x^3 - 3x.$$

  Nach den obigen Bemerkungen ist das gleichbedeutend mit der Suche aller Nullstellen der Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$, d.h. wir suchen alle Werte x für die

  $$h(x) \quad = \quad x^2 - 2 - x^3 + 3x \quad = \quad 0$$

  gilt. Die Schnittpunkte von f (roter Graph) und g (blauer Graph) entsprechen also den Nullstellen von h (grüner Graph).





Die zentrale Aufgabenstellung ist es, die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen.

Satz 1 (Rechenregeln) *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{array}{lcllr}
a + c & = & b + c & \iff & a = b & \\
a \cdot c & = & b \cdot c & \iff & a = b & \textit{falls } c \neq 0 \\
a \cdot b & = & 0 & \iff & a = 0 \textit{ oder } b = 0 & \\
|a| & = & |b| & \iff & a^2 \;=\; b^2 &
\end{array}$$

Allgemeines Vorgehen zur Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung

Durch Äquivalenzumformungen $\iff$ wird die Gleichung so umgeformt, dass die Lösungen direkt abgelesen werden können.

$$\begin{array}{ll}
 & f(x) = 0 \\
\iff & \dots \\
\iff & \dots \\
\iff & x = \dots
\end{array}$$

Dieses Vorgehen wird auch als <u>Auflösen nach x</u> oder <u>Umstellen nach x</u> bezeichnet.

Manchmal kann es auch nötig sein, Folgerungen der Art $\Longrightarrow$ vorzunehmen oder man erhält Aussagen, die über $\Longleftarrow$ miteinander verknüpft sind. Was bedeutet das?

- $f(x) = 0 \iff \cdots \iff \cdots \iff x = 3$ oder $x = 4 \iff \mathbb{L} = \{3, 4\}$

  Die Lösungsmenge beider Aussagen ist gleich, bzw. hat sich während der Umformung nicht geändert.

  $\mathbb{L} = \{3, 4\}$

Beispiel:

$$\begin{aligned} & x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \iff \quad & (x-3)(x-4) = 0 \\ \iff \quad & x = 3 \ \text{ oder } \ x = 4 \end{aligned}$$

- $f(x) = 0 \iff \cdots \implies \cdots \iff x = 3$ oder $x = 4$

  Hier ist zu lesen: Falls für ein x die Gleichung $f(x) = 0$ gilt, so ist dieses x gleich 3 oder 4. Die Lösungen der Ausgangsgleichung können also nur 3 oder 4 sein. Sie müssen es aber **nicht**! Nimmt man also Umformungen des Typs $\implies$ vor, muss man stets die <u>Probe</u> machen.

  $\mathbb{L} \subset \{3, 4\}$

  Beispiel:

$$\begin{aligned} & x - 3 = 0 \\ \implies \quad & (x-3)(x-4) = 0 \\ \iff \quad & x = 3 \text{ oder } x = 4 \end{aligned}$$

!! Vorsicht Fehler !!

Umformungen des Typs $\implies$ kommen insbesondere beim Quadrieren von Gleichungen vor. Dabei ist stets zu beachten, dass folgendes gilt:

- $a = b \implies a^2 = b^2$
- $a = b \not\Longleftarrow a^2 = b^2$
- $|a| = |b| \iff a^2 = b^2$

Es gilt für 2 und -2 sicher $(-2)^2 = 2^2 = 4$.

!! Vorsicht Fehler !!

- $f(x) = 0 \iff \cdots \Longleftarrow \cdots \iff x = 4$

  Hier ist zu lesen: Falls x gleich 4 ist, so gilt auch $f(x) = 0$, d.h. 4 ist auf jeden Fall Lösungen der Ausgangsgleichung. Es ist aber **nicht** gesagt, dass es keine weiteren Lösungen gibt!

  $\mathbb{L} \supset \{4\}$

  Beispiel:

$$\begin{aligned} & (4x)^2 = 256 \\ \Longleftarrow \quad & 4x = 16 \\ \iff \quad & x = 4 \end{aligned}$$

Merke: Wenn möglich sollte man nur Äquivalenzumformungen vornehmen. Im letzten Beispiel rechnet man natürlich genauer:

$$
\begin{aligned}
& (4x)^2 = 256 \\
\iff \quad & 16x^2 = 256 \\
\iff \quad & x^2 = 16 \\
\iff \quad & x = 4 \text{ oder } -4
\end{aligned}
$$

1.2 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen die Unbekannte x nur in der 1. Potenz (d.h. $x^1 = x$) vorkommt.

Allgemeine Gestalt:	$ax + b = 0$ mit $a \neq 0$
Lösung:	$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

Beweis:

$$\begin{aligned} & ax + b &&= 0 && \mid -b \\ \iff & ax &&= -b && \mid \cdot \frac{1}{a} \\ \iff & x &&= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel

$$\begin{aligned} & 12x + \frac{4}{3} &&= 0 && \mid -\frac{4}{3} \\ \iff & 12x &&= -\frac{4}{3} && \mid \cdot \frac{1}{12} \\ \iff & x &&= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

1.3 (Einfache) Gleichungen mit Brüchen

Das Rezept im Umgang mit Gleichungen, in denen Brüche vorkommen, ist stets, diese Gleichungen mit den Nennern dieser Brüche zu multiplizieren. Dadurch lassen sich alle Brüche beseitigen. Wir wollen das an einer einfachen Klasse von Gleichungen diesen Types erläutern.

Allgemeine Gestalt:	$\dfrac{ax+b}{cx+d} = e \quad \text{mit } a - ce \neq 0$
Lösung:	$\mathbb{L} = \left\{ \dfrac{ed-b}{a-ce} \right\}$

Beweis:

$$\begin{array}{rlcll}
& \dfrac{ax+b}{cx+d} & = & e & \mid \cdot (cx+d) \neq 0 \quad \text{d.h. } x \neq -\dfrac{d}{c} \\
\Longleftrightarrow & ax+b & = & e(cx+d) & \\
\Longleftrightarrow & ax+b & = & cex+ed & \mid -cex \\
\Longleftrightarrow & ax-cex+b & = & ed & \mid -b \\
\Longleftrightarrow & ax-cex & = & ed-b & \\
\Longleftrightarrow & (a-ce)x & = & ed-b & \mid \cdot \dfrac{1}{(a-ce)} \\
\Longleftrightarrow & x & = & \dfrac{ed-b}{a-ce} &
\end{array}$$

$\square$

Beispiel

$$\begin{array}{rlcll}
& \dfrac{12x+6}{4x-3} & = & 2 & \mid \cdot (4x-3) \\
\Longleftrightarrow & 12x+6 & = & 2(4x-3) & \mid -8x-6 \\
\Longleftrightarrow & 4x & = & -12 & \\
\Longleftrightarrow & x & = & -3 &
\end{array}$$

1.4 Gleichungen mit Beträgen

Bisher hatten wir für jede Gleichung genau eine Lösung gefunden. Das ändert sich bei Gleichungen mit Beträgen, denn schon die sehr einfache Gleichung

$$|x| \;=\; 2$$

hat die beiden Lösungen $x = 2$ und $x = -2$!

Satz 2 (Grundregel für Gleichungen mit Beträgen) *Sei f eine Funktion und $c > 0$ eine Konstante. Dann gilt*

$$\boxed{|f(x)| = c \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = c \quad \textit{oder} \quad f(x) = -c.}$$

Wir können also eine Gleichung mit Betrag auf zwei Gleichungen ohne Betrag zurückführen. Letztere beiden Gleichungen können wir (hoffentlich) mit bereits besprochenen Methoden lösen und beide Lösungsmengen zusammenfassen.

Beispiel

$$\left|\frac{12x+6}{4x-3}\right| \;=\; 2$$

Sicher gilt $|2| = 2$ **und** $|-2| = 2$, d.h. die Funktion zwischen den Betragsstrichen darf die beiden Werte 2 **oder** -2 annehmen.

Also ist die obige Gleichung äquivalent zu den **beiden** Gleichungen (ohne Betrag):

$$\frac{12x+6}{4x-3} \;=\; 2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{12x+6}{4x-3} \;=\; -2.$$

Die erste Gleichung besitzt die Lösung $x = -3$ (siehe letztes Kapitel) und die zweite Gleichung wird durch $x = 0$ gelöst (überprüfen Sie das). Die Lösungsmenge der Gleichung ist somit $\mathbb{L} = \{-3, 0\}$.

1.5 Quadratische Gleichungen

Allgemeine Gestalt: $x^2 + px + q = 0$

Lösungen:
$$\mathbb{L} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } \dfrac{p^2}{4} - q < 0 \\ \left\{-\frac{p}{2}\right\} & \text{für } \dfrac{p^2}{4} - q = 0 \\ \left\{ -\dfrac{p}{2} + \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q},\ -\dfrac{p}{2} - \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \right\} & \text{für } \dfrac{p^2}{4} - q > 0 \end{cases}$$

Beweis:

$$\begin{array}{rlcl} & x^2 + px + q & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 2 \cdot \dfrac{p}{2} x + q & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 2 \cdot \dfrac{p}{2} x + \underbrace{\dfrac{p^2}{4} - \dfrac{p^2}{4}}_{=0} + q & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(x^2 + 2 \cdot \dfrac{p}{2} x + \dfrac{p^2}{4}\right) - \dfrac{p^2}{4} + q & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 & = & \dfrac{p^2}{4} - q \\ \Longleftrightarrow & \left|x + \dfrac{p}{2}\right| & = & \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \\ \Longleftrightarrow & x & = & -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q} \end{array}$$

Die Diskriminante der quadratischen Gleichung ist $D := \dfrac{p^2}{4} - q$. Falls

- $D < 0$, so gibt es keine (reellen) Lösungen, denn wir können keine Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen.
- $D = 0$, so gibt es genau eine Lösung $x = -\frac{p}{2}$.
- $D > 0$, so gibt es zwei Lösungen.

$\square$

Beispiel

$$\begin{aligned}
& x^2+10x+9 &=\ & 0\\
\iff\ & x^2+2\cdot 5\cdot x+9 &=\ & 0\\
\iff\ & x^2+2\cdot 5\cdot x+25-25+9 &=\ & 0\\
\iff\ & \left(x^2+2\cdot 5\cdot x+25\right)-25+9 &=\ & 0\\
\iff\ & (x+5)^2 &=\ & 16\\
\iff\ & |x+5| &=\ & \sqrt{16}\\
\iff\ & x &=\ & -5\pm 4
\end{aligned}$$

Satz 3 (Der Satz von Vieta) *Die Gleichung*

$$x^2+px+q \quad = \quad (x-a)(x-b)$$

ist genau dann erfüllt, wenn $p=-(a+b)$ *und* $q=a\cdot b$*.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
& x^2+px+q &=\ & (x-a)(x-b)\\
\iff\ & x^2+px+q &=\ & x^2-ax-bx+a\cdot b\\
\iff\ & x^2+px+q &=\ & x^2-(a+b)x+a\cdot b\\
\iff\ & p=-(a+b) \text{ und} & & \\
& q=a\cdot b & &
\end{aligned}$$

$\square$

1.6 Gleichungen mit Quadratwurzeln

Kommt die Unbekannte x unter einer Wurzel vor, ist man meistens gezwungen, die Gleichung zu quadrieren. Dabei muss auf folgendes geachtet werden:

- Auf (mindestens) einer Seite der Gleichung darf nur ein Wurzelzeichen stehen.
- Quadrieren ist **keine** Äquivalenzumformung!

  Natürlich gilt die Implikation $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, aber aus $a^2 = b^2$ folgt nicht notwendigerweise $a = b$. Ist z.B. $a = 3$ und $b = -3$, so ist zwar $3^2 = (-3)^2$ aber $3 \neq -3$.

$$\boxed{a = b \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \quad a^2 = b^2}$$

- Die gefundenen ,,Lösungen,, müssen deshalb auch hier überprüft werden, ob sie noch die Ursprungsungleichung erfüllen.

!! Vorsicht Fehler !!

Im Allgemeinen gilt $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, also z.B. $5 = \sqrt{25} = \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

!! Vorsicht Fehler !!

Vorgehen am Beispiel:

Es sollen alle Lösungen der Gleichung $\sqrt{x+18}-2\sqrt{x+27}=-6$ bestimmt werden. Wir nehmen dazu die folgenden Umformungen vor:

$$
\begin{aligned}
&& \sqrt{x+18}-2\sqrt{x+27} &= -6 && \mid +2\sqrt{x+27}\\
&\iff & \sqrt{x+18} &= 2\sqrt{x+27}-6 && \mid ..^2\\
&\implies & x+18 &= 4(x+27)-24\sqrt{x+27}+36 &&\\
&\iff & x+18 &= 4x+144-24\sqrt{x+27} && \mid -144-4x\\
&\iff & -3x-126 &= -24\sqrt{x+27} && \mid :(-3)\\
&\iff & x+42 &= 8\sqrt{x+27} && \mid ..^2\\
&\implies & x^2+84x+1764 &= 64x+1728 && \mid -1728-64x\\
&\iff & x^2+20x+36 &= 0 &&\\
&\iff & x &= -10\pm 8 &&\\
&\iff & x &= -2 \text{ oder } -18 &&
\end{aligned}
$$

Wir haben also zwei mögliche Lösungen -2 und -18 der Ausgangsgleichung erhalten, die wir noch durch eine Probe bestätigen müssen. Zunächst ist die Ausgangsgleichung für beide Werte definiert.

Probe:

- $x=-2$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-2+18}-2\sqrt{-2+27} &= \sqrt{16}-2\sqrt{25}\\
&= 4-10\\
&= -6
\end{aligned}
$$

- $x=-18$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-18+18}-2\sqrt{-18+27} &= \sqrt{0}-2\sqrt{9}\\
&= 0-6\\
&= -6
\end{aligned}
$$

Beide Werte sind somit Lösungen der Ausgangsgleichung.

1.7 Exponential- und Logarithmengleichungen

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, in der die Unbekannte im Exponenten einer Potenz vorkommt. Eine Logarithmengleichung ist eine Gleichung, in der die Unbekannte als Argument eines Logarithmus vorkommt.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 3^{x-2} &= 10 \\ e^{x^2+4} &= 8 \\ 10^{-4x+3} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10}(x-1) &= 1 \\ \ln(x^2+2) &= 4 \\ \ln(4x) - \ln(x-1) &= \ln(2) \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungstypen beruht ganz wesentlich darauf, dass man den Effekt der Exponential- bzw. der Logarithmusfunktion durch die jeweils andere Funktion neutralisieren kann.

Beispiel für eine Exponentialgleichung: Wir wollen die Exponentialgleichung

$$3^{x^2-4} = 6^{-x}$$

lösen. Man sieht schnell, dass alle Terme der Gleichungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Wir erhalten die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned} & 3^{x^2-4} &&= 6^{-x} && |\ln(..) \\ \Longleftrightarrow\ & \ln(3^{x^2-4}) &&= \ln(6^{-x}) && \\ \Longleftrightarrow\ & (x^2-4)\ln 3 &&= -x\ln 6 && |:\ln 3 \text{ und ordnen} \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 + \frac{\ln 6}{\ln 3}\,x - 4 &&= 0 && \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung, die mit den uns bekannten Mitteln gelöst werden kann. Man erhält $x_1 \approx -2.98$ und $x_2 \approx 1.34$.

Beispiel für eine Logarithmengleichung: Wir wollen die Logarithmengleichung

$$\log_2(x^2+1) \quad = \quad \log_2(4x^2-1)$$

lösen. Zunächst müssen wir hier beachten, dass der Logarithmus nur für echt positive Werte definiert ist. Der Term x^2+1 ist stets positiv und der zweite Term gibt uns die folgende Einschränkung für den Lösungsbereich der Gleichung:

$$\begin{aligned} & 4x^2-1 && > && 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4x^2 && > && 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 && > && \tfrac{1}{4} \\ \Longleftrightarrow \quad & |x| && > && \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich unserer Gleichung ist somit $D = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$, d.h. wenn es überhaupt Lösungen geben kann, dann in diesem Bereich.

Wir erhalten nun die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned} & \log_2(x^2+1) && = && \log_2(4x^2-1) \quad |2^{(\cdot)} \\ \Longrightarrow \quad & x^2+1 && = && 4x^2-1 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3x^2 && = && 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 && = && \tfrac{2}{3} \\ \Longleftrightarrow \quad & x && = && \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}} \end{aligned}$$

Hier sollte man die Probe nicht vergessen, denn wir haben mindestens eine Nichtäquivalenzumformung vorgenommen. Beide Werte sind tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung, denn für die linke und rechte Seite der Ausgangsgleichung gilt:

$$\begin{aligned} \log_2\left(\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + 1\right) &= \log_2\left(\frac{5}{3}\right) \\ \log_2\left(4\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - 1\right) &= \log_2\left(\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

2 Ungleichungen

2.1 Grundlegendes

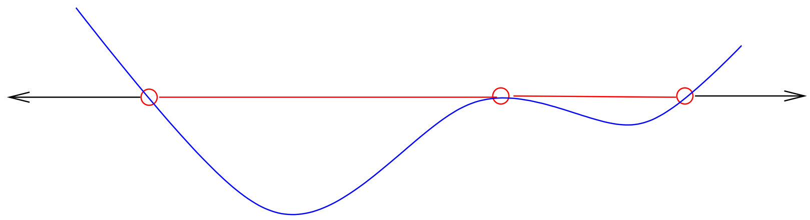
Definition 2.1 *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Unter einer Ungleichung mit einer Unbekannten versteht man eine Aussageform vom Typ*

$$f(x) < 0 \qquad \textit{oder ;} \qquad f(x) > 0.$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer Ungleichung ist dann die Menge aller x, für die $f(x) < 0$ gilt:

$$\mathbb{L} \;=\; \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; f(x) < 0 \,\}.$$

Geometrisch gesehen, ist die Lösungsmenge der Ungleichung $f(x) < 0$ die Menge aller x-Werte des Definitionsbereiches D, für die der Graph von f **unter** der x-Achse liegt! In der Skizze sind das genau die rot gekennzeichneten Stücke der x-Achse.



Beispiele:

$$f(x) = x + 5 < 0 \qquad \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x < -5\}$$

$$f(x) = x^2 - 4 < 0 \qquad \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \;:\; -2 < x < 2\}$$

$$f(x) = \sin(x^2) + \ln(x) + 13 = 0 \qquad \mathbb{L} = \{?\}$$

Da jede Ungleichung mit $<$ durch Vertauschen der Seiten (oder Multiplikation mit -1) in eine Ungleichung mit $>$ überführt werden kann, werden wir die Regeln nur für einen Typ formulieren.

Satz 4 (Rechenregeln) *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{array}{lclcl}
a + c & < & b + c & \Longleftrightarrow & a < b \\[2ex]
a \cdot c & < & b \cdot c & \Longleftrightarrow & \begin{cases} a < b & \textit{für } c > 0 \\[2ex] a > b & \textit{für } c < 0 \end{cases} \\[2ex]
a \cdot b & > & 0 & \Longleftrightarrow & (a > 0 \textit{ und } b > 0) \textit{ oder } (a < 0 \textit{ und } b < 0) \\[2ex]
a \cdot b & < & 0 & \Longleftrightarrow & (a > 0 \textit{ und } b < 0) \textit{ oder } (a < 0 \textit{ und } b > 0) \\[2ex]
|a| & < & c \quad \textit{falls } c > 0 & \Longleftrightarrow & -c < a < c
\end{array}$$

Wir werden beim Lösen von Ungleichungen zunächst wie beim Lösen von Gleichungen vorgehen. Unseren speziellen Augenmerk werden wir dann darauf richten, wo Ungleichungen einer Sonderbehandlung bedürfen.

Gegenüberstellung der Rechenregeln von Gleichungen und Ungleichungen

1.

$a+c=b+c \iff a=b$	$a+c<b+c \iff a<b$

Hier besteht kein Unterschied zwischen Gleichungen und Ungleichungen. Wir können stets auf beiden Seiten beliebige Ausdrücke addieren und subtrahieren.

2. Für $c \neq 0$ gilt

$a \cdot c = b \cdot c \iff a = b$	$a \cdot c < b \cdot c \iff \begin{cases} a<b & \text{für } c>0 \\ a>b & \text{für } c<0 \end{cases}$

Der Regel für Gleichungen entsprechen zwei Regeln bei Ungleichungen und hier ist meist eine Fallunterscheidung nötig.

!!!!!! Vorsicht Fehler !!!!!!

Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert (oder durch eine negative Zahl dividiert), so **kehrt** sich die Relation um!

Beispiel: Es gilt $2 < 3$ (mittlerer Ausdruck) und durch Multiplikation mit -1 folgt

$$-2 < -3 \not\Longleftrightarrow 2 < 3 \iff -2 > -3$$

!!!!!! Vorsicht Fehler !!!!!!

3. Die dritte und vierte Regel für Ungleichungen lässt sich wie folgt ausdrücken: Ein Produkt aus zwei Faktoren ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren gleiches Vorzeichen haben. Es ist genau dann negativ, falls beide Faktoren verschiedene Vorzeichen haben.

   Die entsprechende Regel bei Gleichungen besagt, dass das Produkt aus zwei Faktoren genau dann Null ist, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist.

2.2 Einfaches Rezept zum Lösen von $f(x) < 0$

Alternativ zu den Verfahren zum Lösen von Ungleichungen, wie sie in der Schule vermittelt werden, möchte ich hier einen anderen Lösungsweg anbieten.

Beachten Sie: **Ändert eine Funktion f im Punkt x das Vorzeichen, dann ist x eine Unstetigkeitsstelle oder eine Nullstelle.** Beachten Sie aber auch, dass eine Funktion weder an einer Unstetigkeitsstelle noch an einer Nullstelle ihr Vorzeichen ändern **muss**.

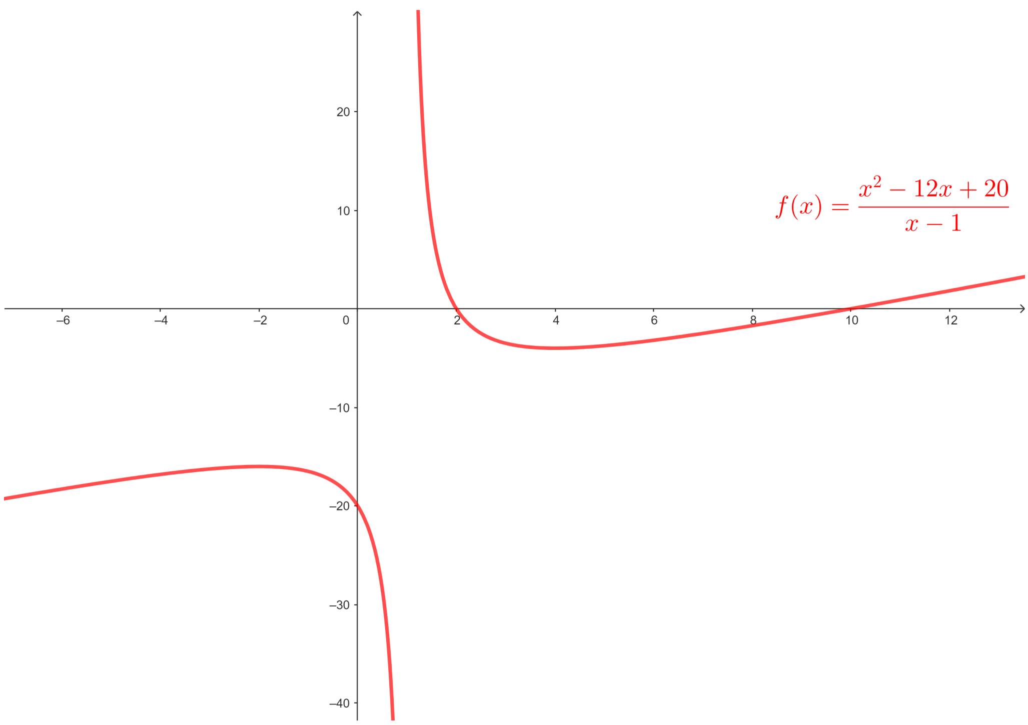
1. Bestimmen Sie alle Punkte $\mathbb{L}_{Loch}$ in denen f nicht definiert ist.
2. Lösen Sie die zugehörige Gleichung $f(x) = 0$. Sie erhalten die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{Gleich}$.
3. Die nach der Grösse geordneten Punkte der Menge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{Loch} \cup \mathbb{L}_{Gleich}$ zerlegen die x-Achse in Teilintervalle. Falls man davon ausgehen kann, dass die Funktion f zwischen den Punkten aus $\mathbb{L}$ stetig ist, genügt es, in jedem durch die Menge $\mathbb{L}$ gebildeten Intervall einen Testpunkt x^* auszuwählen. Gilt dann
   - $f(x^*) > 0$ so gehört das entsprechende Intervall **nicht** zur Lösungsmenge der Ungleichung; bzw.
   - $f(x^*) < 0$ so gehört das entsprechende Intervall zur Lösungsmenge der Ungleichung und die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigung aller dieser Teilintervalle.

Vorgehen am Beispiel:

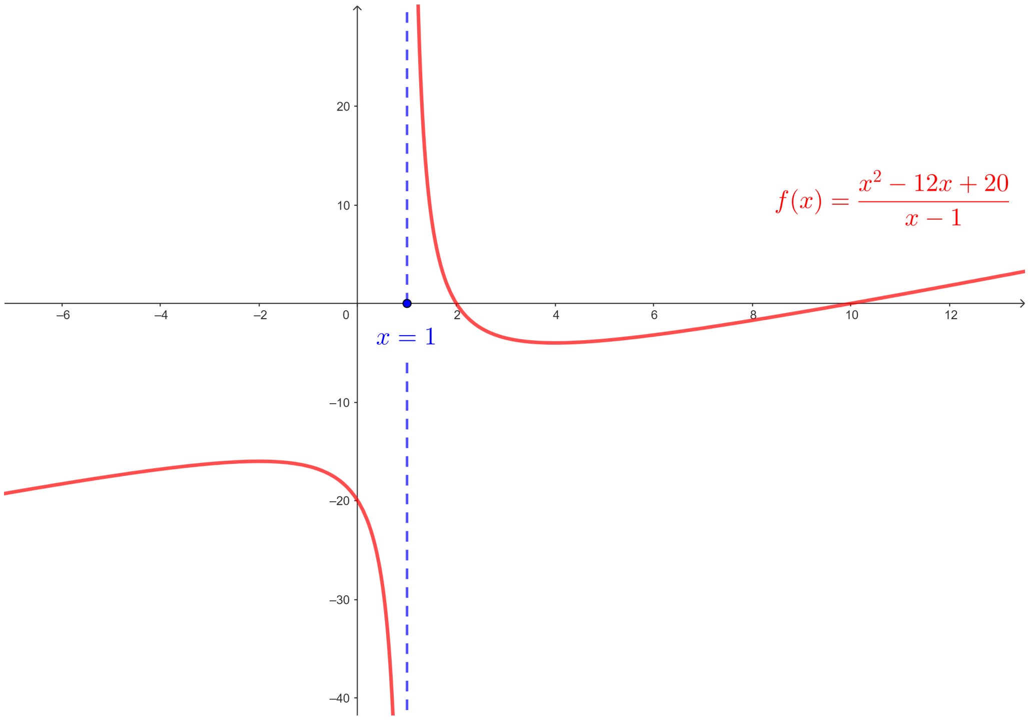
Es sollen alle Lösungen der Ungleichung

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 12x + 20}{x - 1} \quad < \quad 0$$

bestimmt werden. Wir wollen uns aus didaktischen Gründen schon am Anfang ein Bild des Graphen der Funktion ansehen, an dem man die Lösungen der Ungleichungen (ungefähr) ablesen könnte! Natürlich steht eine solche Zeichnung im Normalfall nicht zur Verfügung.

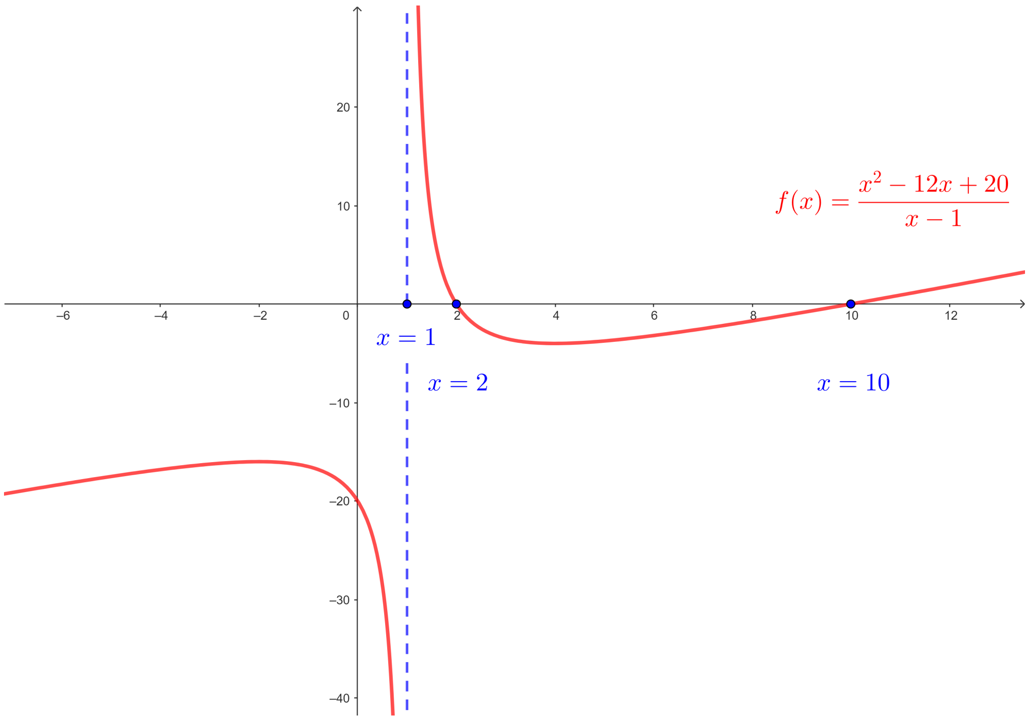


1. Unstetigkeitsstellen von f: $\mathbb{L}_{Loch} = \{1\}$
   Klar, da der Nenner von f im Punkt $x = 1$ gleich Null ist (und der Zähler nicht).



2. Nullstellen von f: $\mathbb{L}_{Null} = \{2, 10\}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 12x + 20}{x - 1} &= 0 \quad | \cdot (x-1) \neq 0 \\ \iff x^2 - 12x + 20 &= 0 \\ \iff (x-2) \cdot (x-10) &= 0 \end{aligned}$$

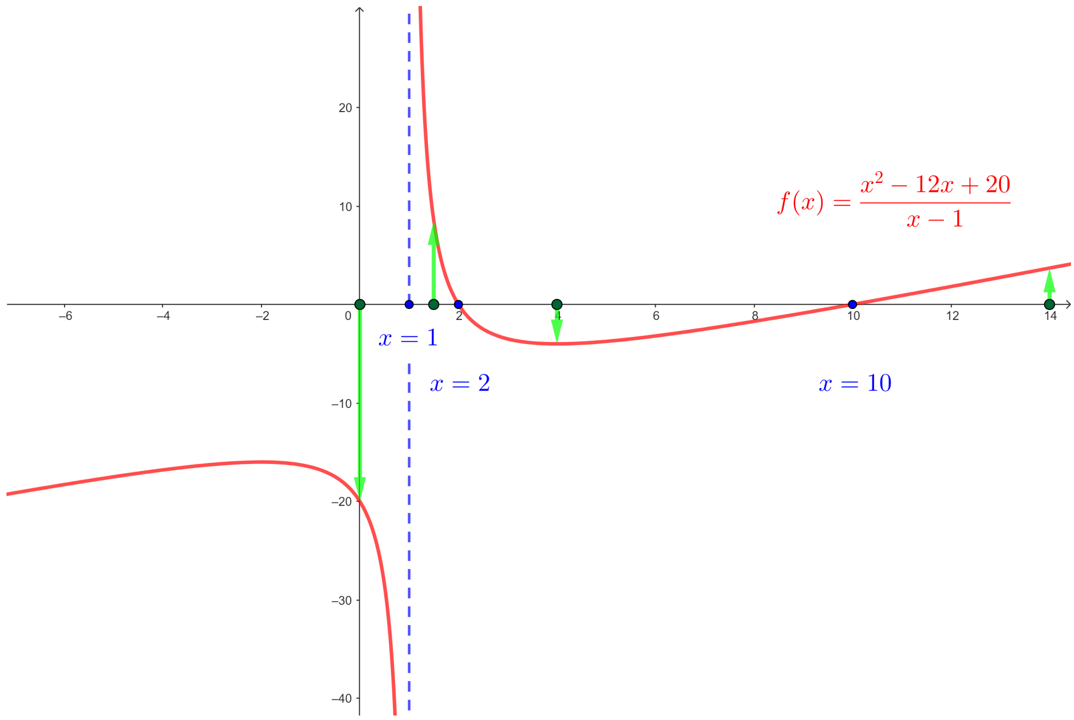


3. Insgesamt haben wir $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{Loch} \cup \mathbb{L}_{Null} = \{1, 2, 10\}$ und wir erhalten die folgende Zerlegung der x-Achse in 4 Teilintervalle, auf denen f jeweils sicher das selbe Vorzeichen hat:

$$(-\infty, 1), (1, 2), (2, 10), (10, \infty).$$

Nun wählen wir in jedem dieser Teilintervalle einen Testpunkt, um dieses Vorzeichen zu bestimmen.

$$\begin{array}{llll}
0 \in (-\infty, 1) & f(0) = \dfrac{0^2 - 12 \cdot 0 + 20}{0 - 1} & < & 0 \\[2ex]
1.5 \in (1, 2) & f(1.5) = \dfrac{1.5^2 - 12 \cdot 1.5 + 20}{1.5 - 1} & > & 0 \\[2ex]
4 \in (2, 10) & f(4) = \dfrac{4^2 - 12 \cdot 4 + 20}{4 - 1} & < & 0 \\[2ex]
14 \in (10, \infty) & f(14) = \dfrac{14^2 - 12 \cdot 14 + 20}{14 - 1} & > & 0
\end{array}$$



Die letztendliche Lösung der Ungleichung ist also $\underline{(-\infty, 1) \cup (2, 10)}$.