Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs
Dr. Thomas Zehrt

Differential- und Integralrechnung

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzen- und Differentialquotient

Gegeben sei eine stetige Funktion $y = f(x)$.

Unter der durchschnittlichen Änderung der Funktion f im Intervall $[x, x + \Delta x]$ versteht man den Quotienten

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{\text{Echte Änderung von} f}{\text{Intervalllänge}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Der Ausdruck $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird auch als Differenzenquotient bezeichnet. Im allgemeinen hängt der Differenzenquotient von den folgenden drei Grössen ab:

- der Funktion f,
- dem Punkt x und
- der Intervalllänge Δx.

Eigentlich sollte man für die echte Änderung von f besser $\Delta f(x, \Delta x)$ anstelle von $\Delta f(x)$ schreiben, denn diese Grösse hängt natürlich von x **und** Δx ab.

Beispiele:

1. $y = f(x) = 2x + 3$

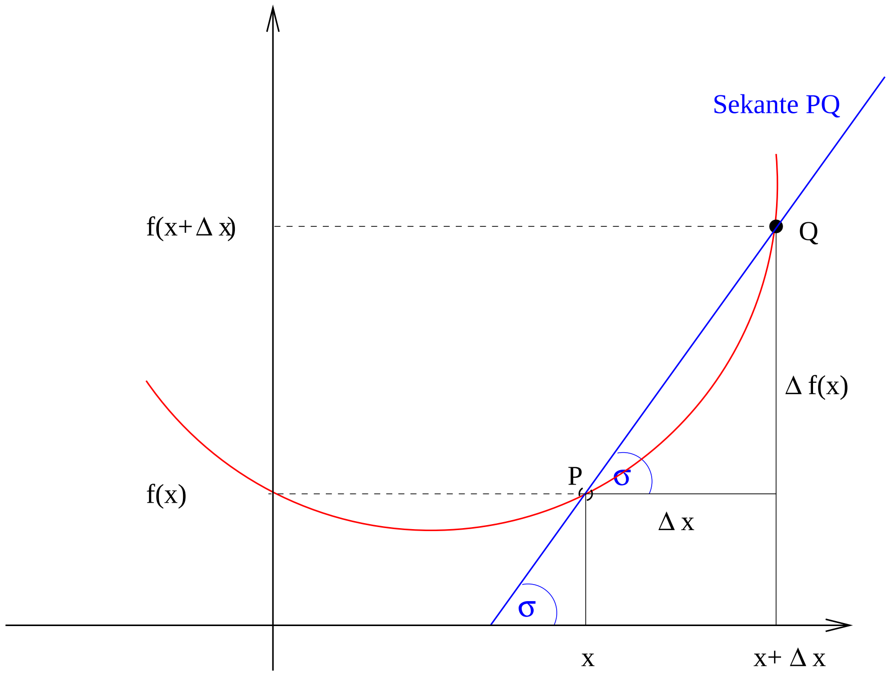
$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{2(x + \Delta x) + 3 - (2x + 3)}{\Delta x} \\ &= \frac{2x + 2\Delta x + 3 - 2x - 3}{\Delta x} \\ &= \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. $y = f(x) = x^2$

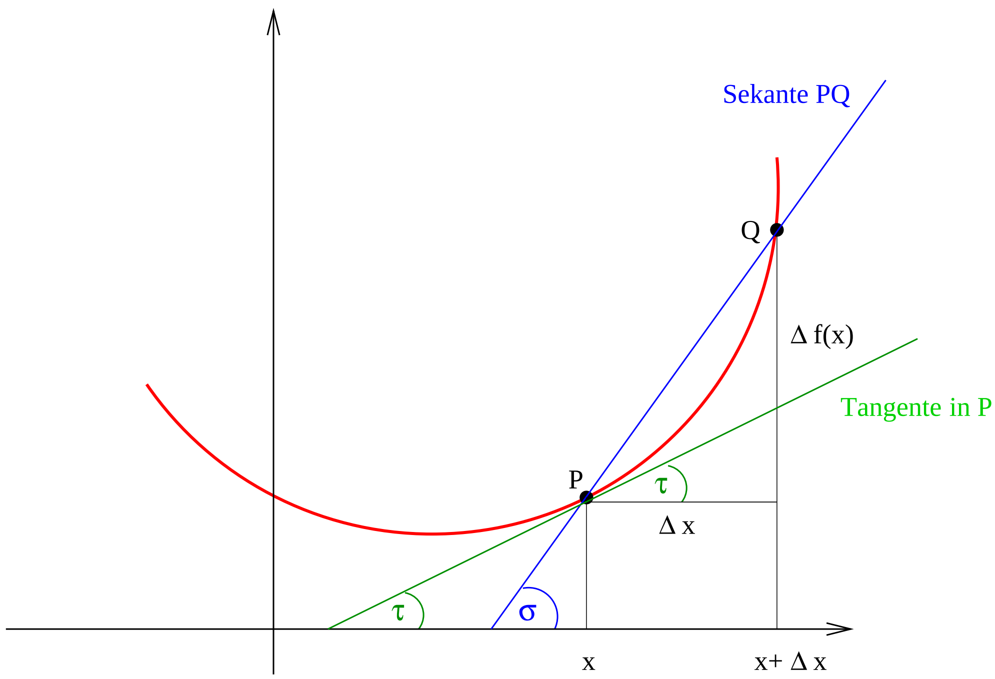
$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x. \end{aligned}$$

Natürlich hängt das Resultat direkt von der Funktion f ab und das Ergebnis (der Differenzenquotient) ist selbst eine Funktion, die auf die Eingabe der beiden Grössen x und Δx wartet, um uns daraus die durchschnittliche Änderung der Funktion auf dem Intervall $[x, x + \Delta x]$ zu berechnen.

Geometrische Deutung: Der Differenzenquotient ist gleich dem Tangens des Neigungswinkels σ der Sekante PQ.



Lässt man nun den Punkt Q gegen P wandern, d.h. $\Delta x \to 0$ streben, so geht die Sekante in die Tangente im Punkt P über. Wir betrachten den Tangens des Neigungswinkels τ der Tangente.



Der Grenzwert

$$f'(x) \;:=\; \tan(\tau) \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

heisst der Differentialquotient oder 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x, falls dieser Grenzwert existiert. Er stellt in gewisser Weise die ,,momentane Änderung,, von f an der Stelle x dar.

Schreibweise:

$$y' \;=\; f'(x) \;=\; \frac{df(x)}{dx} \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; Df(x)$$

Beispiele:

1. Für die Funktion $y = x^2$ wissen wir bereits, dass $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ gilt. Dann folgt einfach

$$\frac{df(x)}{dx} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) \;=\; 2x.$$

2. $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

   $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$

   $\dfrac{df(x)}{dx} =$

2 Differentiationsregeln

Es gelten die folgenden (zum Teil einfach zu überprüfenden) Regeln:

Satz 1

1.	$y = k$ *konstant*	$y' = 0$	
2.	$y = a \cdot f(x)$ *mit* $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot f'(x)$	*Konstantenregel*
3.	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$	*Summenregel*
4.	$y = x^a$ *mit* $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot x^{a-1}$	*Potenzregel*
5.	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	*Produktregel*
6.	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *mit* $g(x) \neq 0$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	*Quotientenregel*
7.	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	*Kettenregel*

Beispiele:

- (Potenzregel)
$$y = 5 \cdot x^5 \quad \Rightarrow \quad y' = 5 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 25 \cdot x^4$$
- (Summenregel und Potenzregel)
$$y = x^5 + x^4 \quad \Rightarrow \quad y' = 5 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3$$
- (Produkt-, Potenz- und Summenregel)
$$y = x^2 \cdot (x^3 + 7x - 1) \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \cdot (x^3 + 7x - 1) + x^2 \cdot (3x^2 + 7)$$
- (Quotienten-, Potenz- und Summenregel)
$$y = \frac{x^3}{x^2 - 7} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3x^2(x^2 - 7) - x^3(2x)}{(x^2 - 7)^2} \quad = \quad \frac{x^4 - 21x^2}{(x^2 - 7)^2}$$
- (Ketten-, Potenz- und Summenregel)
$$\begin{aligned} g(x) = x^2 - 7x^3 \quad f(u) = u^{21} \quad F(x) = f(g(x)) = (x^2 - 7x^3)^{21} \\ \Rightarrow F'(x) \;=\; f'(g(x)) \cdot g'(x) \;=\; 21(x^2 - 7x^3)^{20}(2x - 21x^2) \end{aligned}$$

3 Ableitung spezieller Funktionen

Satz 2 (Ableitungen der trigonometrischen Funktionen)

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = \sin(x) & y' = \cos(x) \\[1em] y = \cos(x) & y' = -\sin(x) \\[1em] y = \tan(x) & y' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{array}}$$

Satz 3 (Ableitungen der Logarithmus- und der Exponentialfunktionen)

$$\boxed{\begin{array}{ll} y = \ln(x) & y' = \dfrac{1}{x} \\[1em] y = e^x & y' = e^x \\[1em] y = a^x & y' = \ln(a) \cdot a^x \\[1em] y = \log_a(x) & y' = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \dfrac{1}{x} \end{array}}$$

4 Unbestimmtes und bestimmtes Integral

Definition 4.1 *Eine Funktion $y = F(x)$ heisst Stammfunktion der Funktion $y = f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$ gilt.*

Beispiel 4.1 *Man findet schnell eine Stammfunktion F für die Funktion $f(x) = x$, denn es gilt $(x^2/2)' = 2x/2 = x$, also ist $\frac{x^2}{2}$ eine Stammfunktion von f. Ebenfalls gilt für jede Zahl (Konstante) c die Gleichung $(x^2/2 + c)' = 2x/2 = x$, also ist auch jede Funktion der Gestalt $\frac{x^2}{2} + c$ eine Stammfunktion von f.*

Definition 4.2 (Das unbestimmte Integral) *Stammfunktionen einer Funktion $y = f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante. Die Menge aller Stammfunktionen von $y = f(x)$ nennt man unbestimmtes Integral und schreibt*

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Einige wichtige unbestimmte Integrale

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
0	$c,\ c \in \mathbb{R}$	1	$x + c,\ c \in \mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c,\ c \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + c,\ c \in \mathbb{R}$	e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c,\ c \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c,\ c \in \mathbb{R}$

Definition 4.3 (Das bestimmte Integral) *Das bestimmte Integral ist gleich der Nettofläche unter der Kurve $y = f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$. Man schreibt dafür:*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ganz entscheidend ist der folgende Zusammenhang zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integral:

Satz 4 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion und F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a).$$

Beispiel 4.2

1.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \quad = \quad -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = \; -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0) \; = \; 1.$$

2. *Was halten Sie von der folgenden Rechnung*
$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}dx \quad = \quad -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{2} \quad = \; -\frac{1}{2} + 1 \; = \; \frac{1}{2} \;\; ???$$

5 Eigenschaften des bestimmten Integrals

1. Es genügt vorauszusetzen, dass f stückweise stetig ist:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2. Nimmt die Funktion auch negative Werte an, so ist der folgende Sachverhalt zu beachten: Das bestimmte Integral
$$\int_a^b f(x)dx$$
ist die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse, **wobei Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ gezählt werden**.

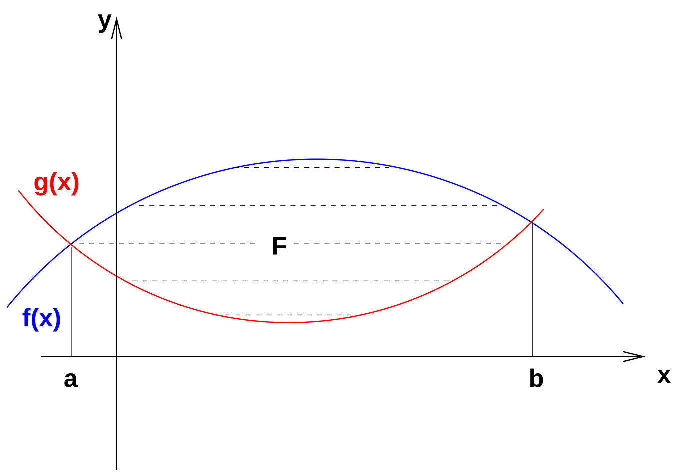
3. $$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$

4. $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5. $$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

6. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

7. Für den Inhalt der Fläche F die von den Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird gilt
$$area(F) = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|.$$



6 Integralfunktionen

Der Zahlenwert $\int_a^b f(x)\,dx$ lässt sich als (Netto)flächeninhalt der Fläche zwischen x-Achse und Funktionsgraph zwischen den beiden Grenzen $x = a$ und $x = b$ interpretieren. Hält man die untere Integrationsgrenze a fest und variiert die obere Integrationsgrenze b, so erhält man für jeden Wert b genau einen (Netto)flächeninhalt $\int_a^b f(x)\,dx$. Um diese Variation besser verdeutlichen zu können ersetzt man b durch die Variable x und ersetzt die Integrationsvariable (was eigentlich nicht nötig ist, aber hoffentlich Missverständnissen vorbeugt) durch einen anderen Buchstaben, hier t.

Definition 6.1 *Die Funktion sei auf einem Intervall I stetig und $a, x \in I$. Dann heisst die Funktion*

$$F_a(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

Integralfunktion zu f (und a).

Bemerkungen

- Für positives f und $x > a$ lässt sich $F_a(x)$ als variabler Flächeninhalt unter dem Graphen von f ansehen.
- Je nach Festlegung der unteren Integrationsgrenze gibt es verschiedene Integralfunktionen für f.

Beispiel 6.1 *Sei $f(x) = x^2 - 1$ (oder $f(t) = t^2 - 1$). Dann gilt z.B.*

$$\begin{aligned}
F_3(x) &= \int_3^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_3^x = \frac{1}{3}x^3 - x - \left(\frac{1}{3}3^3 - 3\right) = \frac{1}{3}x^3 - x - 6 \\
F_0(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_0^x = \frac{1}{3}x^3 - x - \left(\frac{1}{3}0^3 - 0\right) = \frac{1}{3}x^3 - x + 0 \\
F_a(x) &= \int_a^x f(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_a^x = \frac{1}{3}x^3 - x - \left(\frac{1}{3}a^3 - a\right)
\end{aligned}$$

Bemerkungen

An diesem Beispiel kann man folgendes erkennen:

- Alle Integralfunktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.
- Die Ableitungen liefern die Ausgangsfunktion $x^2 - 1$ zurück.

Diese Tatsachen sind allgemein gültig und liefern:

Satz 5 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Es sei f auf einem Intervall I stetig. Dann ist jede Integralfunktion F_a von f mit $a \in I$ differenzierbar auf I und es gilt:*

$$F_a'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\,F_a(x) \;=\; f(x).$$

Jede Integralfunktion ist somit eine Stammfunktion von f. (Die Umkehrung gilt allerdings nicht!)

7 Aufgaben

1. (**Fundamentalaufgabe**) Angenommen, Sie können den Graphen einer Funktion $y = f(x)$ skizzieren. Wo kann man die reellen Zahlen

$$f'(a), f'(b), f'\left(\frac{a+b}{2}\right), \int_a^b f(x)dx\ , \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^\infty f(x)dx$$

„sehen" ?

2. Bestimmen Sie unter Verwendung der (Ableitungs)regeln die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $y = 7 \cdot (4 - x)^8$
   (b) $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x}$
   (c) $y = \sin(2x^2)$
   (d) $y = \sqrt{1 - \cos(3x)}$
   (e) $y = \dfrac{\sin(x)}{1 + e^x}$
   (f) $y = x \cdot \ln(4x)$
   (g) $y = e^{\sqrt{x}}$

3. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f_1(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 4}$ für $x \neq 4$
   (b) $f_2(x) = xe^{\sqrt{x}}$
   (c) $f_3(x) = \ln\left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right)$
   (d) $f_4(x) = 7^{3x}$
   (e) $f_5(x) = x^x$

4. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Versuchen Sie dabei die jeweilige Stammfunktion zu erraten und bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch ableiten.

   (a) $\displaystyle\int_0^2 e^{0.5x}\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2}\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^2 3^x\, dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos(x)|\, dx$

5. Sei $f(x) = x^2 + x + 1$. Bestimmen Sie die Integralfunktionen $F_{-2}(x)$, $F_0(x)$, $F_2(x)$ und $F_a(x)$ allgemein.

6. Gesucht ist die Fläche, die von den Funktionen

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = -\frac{1}{2}x \quad \text{und } y = \frac{1}{16}x^2 + 1$$

eingeschlossen wird.

7. Es sei die Kostenfunktion (sie gibt die (Produktionskosten)Kosten $k(x)$ als Funktion der produzierten Stückzahl x an)

$$k(x) := \begin{cases} x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

gegeben. Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie $\displaystyle\int_0^3 k(x)dx$.

8. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Parabeln $y = x^2$ und $y = -x^2 + 5$ begrenzt wird.

9. Finden Sie die Funktionsgleichung einer Kurve, deren Anstieg durch die Gleichung $f(x) = 3x - 2$ beschrieben wird und deren Funktionswert im Punkt $x = 4$ gleich 1 ist.

8 Lösungen der Aufgaben

1.

2. $a)\ -56(4-x)^7$,

   $b)\ \dfrac{2x-5}{3(x^2-5x)^{2/3}}$,

   $c)\ 4x \cdot \cos(2x^2)$,

   $d)\ \dfrac{3 \cdot \sin(3x)}{2\sqrt{1-cos(3x)}}$,

   $e)\ \dfrac{\cos(x)(1+e^x)-e^x\sin(x)}{(1+e^x)^2}$

   $f)\ 1+\ln(4x)$ und

   $g)\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

3. $a)\ f_1' = \dfrac{-13}{(x-4)^2}$,

   $b)\ f_2' = \left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)e^{\sqrt{x}}$,

   $c)\ f_3' = \dfrac{-2x}{1+x^2}$,

   $d)\ f_4' = 3 \cdot \ln(7) \cdot 7^{3x}$

   $e)\ f_5' = (1+\ln(x))x^x$

4. $a)\ 2e-2,\ \ b)\ \ln(2),\ \ c)\ 8/\ln(3),\ \ d)\ 2$

5. $F_{-2}(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{8}{3}$,

   $F_0(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$,

   $F_2(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{20}{3}$

   $F_a(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{1}{3}a^3 - \dfrac{1}{2}a^2 - a$

6. 8/3

7.

$$\begin{aligned}
\int_0^3 k(x)dx &= \int_0^2 (x^2+5)\ dx + \int_2^3 (x+8)\ dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3+5x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2+8x\right]_2^3 \\
&= \frac{139}{6}
\end{aligned}$$

8. Schnittpunkte: $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

   Fläche: $2 \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{5}{2}}} (-x^2 + 5 - x^2)dx \; = \; \frac{10}{3}\sqrt{10} \; = \; 10.5409$

9. $g(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x - 15$