Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs

Dr. Thomas Zehrt

Exponentialfunktionen und Logarithmen

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die e-Funktion $f(x) = e^x$ ist eine der wichtigsten Funktionen in vielen ökonomischen (und technischen) Anwendungen. Sie kommt stets dann ins Spiel, wenn man versucht, so genannte Wachstumsprozesse mathematisch zu modellieren, bei denen (zumindest näherungsweise) folgendes gilt:

- der Zuwachs der betrachteten Grösse ist proportional zum aktuellen Wert dieser Grösse und
- dieser Zuwachs findet kontinuierlich statt.

Ein typischer Wachstumsprozess ist das Wachstum eines Guthabens bei (stetiger) Verzinsung. Wir wollen an einem Beispiel erläutern, wie hier die e-Funktion ins Spiel kommt.

Beispiel:

Wir legen ein Guthaben der Grösse $G_0 = 100.-$ (Franken, wobei wir im folgenden konsequent auf die Einheit verzichten werden) auf einem Konto zum Zinssatz $p = 0.01 = 1\%$ an. Dann hat man nach einem Jahr (bei einmaliger Verzinsung) ein Guthaben von

$$G_1 \;=\; G_0 \cdot (1+p) = G_0 + p \cdot G_0 \;=\; 100 \cdot 1.01 \;=\; 101.$$

Zunächst sieht man (sofort), dass der Zuwachs der betrachteten Grösse (das Guthaben) proportional zum aktuellen Wert dieser Grösse ist. Das spiegelt sich in der obigen Gleichung wider, denn nach Umstellung dieser Relation erhält man:

$$\underbrace{\Delta G = G_1 - G_0}_{\text{Zuwachs (pro Zeiteinheit)}} \quad = \quad \underbrace{p}_{\text{Proportionalitätsfaktor}} \quad \cdot \quad \underbrace{G_0}_{\text{Anfangsguthaben}}$$

Natürlich geschieht dieser Zuwachs in diesem Fall nicht kontinuierlich, sondern in Sprüngen von jeweils einem Jahr. Wir können uns aber diesem kontinuierlichen Zuwachs annäheren, indem wir z.B. nicht einmal pro Jahr, sondern jede Woche (d.h. 52 mal pro Jahr) mit dem entsprechend angepassten Zinssatz

$$\frac{p}{52} \;=\; \frac{1}{5'200}$$

verzinsen. Nach einem Jahr haben wir dann ein Guthaben von

$$G_1^{52} \;=\; \underbrace{\underbrace{\underbrace{G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)}_{\text{Guthaben nach 1. Woche}} \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)}_{\text{Guthaben nach 2. Woche}} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)}_{\text{Guthaben nach 52. Woche}}$$

$$= \; G_0 \cdot \left(1+\frac{p}{52}\right)^{52} \;=\; 100 \cdot \left(\frac{5'201}{5'200}\right)^{52} \;\approx\; 101.0049$$

Natürlich ist auch das noch kein kontinuierlicher Prozess. Dazu müssten wir, anschaulich gesprochen, in jedem (der unendlich vielen) Augenblicken des Jahres mit einem (unendlich kleinen) angepassten Zinssatz p/∞ verzinsen. Mathematisch kann man das durch einen Grenzwert beschreiben:

$$G_1^\infty \;=\; G_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n .$$

Wir wollen uns nun diesen Grenzprozess etwas genauer anschauen und betrachten zunächst der Einfachheit halber den Fall $p = 1$. Zunächst einmal ist nicht klar, wie der Grenzwert von

$$? \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

aussieht, denn man kann hier zwei gegenläufige Effekte beobachten:

1. Für $n \to \infty$ konvergiert der Term $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ gegen 1, er kommt der 1 dabei beliebig nahe, wird aber nie genau 1.
2. Dann wird das Produkt von n solcher Terme gebildet:

$$\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \;=\; \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

   Dazu könnte uns folgendes einfallen:

   (a) Da $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ gilt, **könnte**

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;=\; \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

   gelten!??

   (b) Für jede Konstante $q > 1$ (egal wie klein die Abweichung von 1 ist), gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$. Also **könnte**

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;=\; \infty$$

   gelten!??

Wir können hier also mit einem halbwegs gutem Gewissen nur feststellen, dass

$$1 \le \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \le \infty.$$

Berechnen wir die ersten 10 Glieder dieser Zahlenfolge, so erhalten wir die Zahlenwerte in der folgenden Tabelle.

n	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000	2.00000
2	1.50000	2.25000
3	1.33333	2.37037
4	1.25000	2.44146
5	1.20000	2.48832
6	1.16667	2.52163
7	1.14286	2.54650
8	1.12500	2.56578
9	1.11111	2.58117
10	1.10000	2.59374
50	1.0200	2.69159
100	1.0100	2.70481
1000	1.0010	2.71692

Anhand dieser numerischen Experimente scheint man erkennen zu können, dass diese Folge einen Grenzwert zwischen 2 und 3 hat. Das ist tatsächlich der Fall und dieser Grenzwert wird als Eulersche Zahl bezeichnet und durch e abgekürzt.

$$e \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \;\approx\; 2.7182818284590452354.$$

Insbesondere gilt die folgende wichtige Gleichung, die uns eine Beschreibung und Definition der natürlichen Exponentialfunktion liefert:

$$\boxed{e^x \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

2 Exponential- und Logarithmusfunktion

Wir betrachten die Exponentialfunktion zur Basis a ($a > 0, a \neq 1$):

$$y = f(x) \quad = \quad a^x.$$

Wir untersuchen die beiden Fälle $a > 1$ und $a < 1$.

1. $a > 1$

   $y = a^x$ ist streng monoton wachsend

   für $x \to \infty$ geht $y \to \infty$

   für $x \to -\infty$ geht $y \to 0$

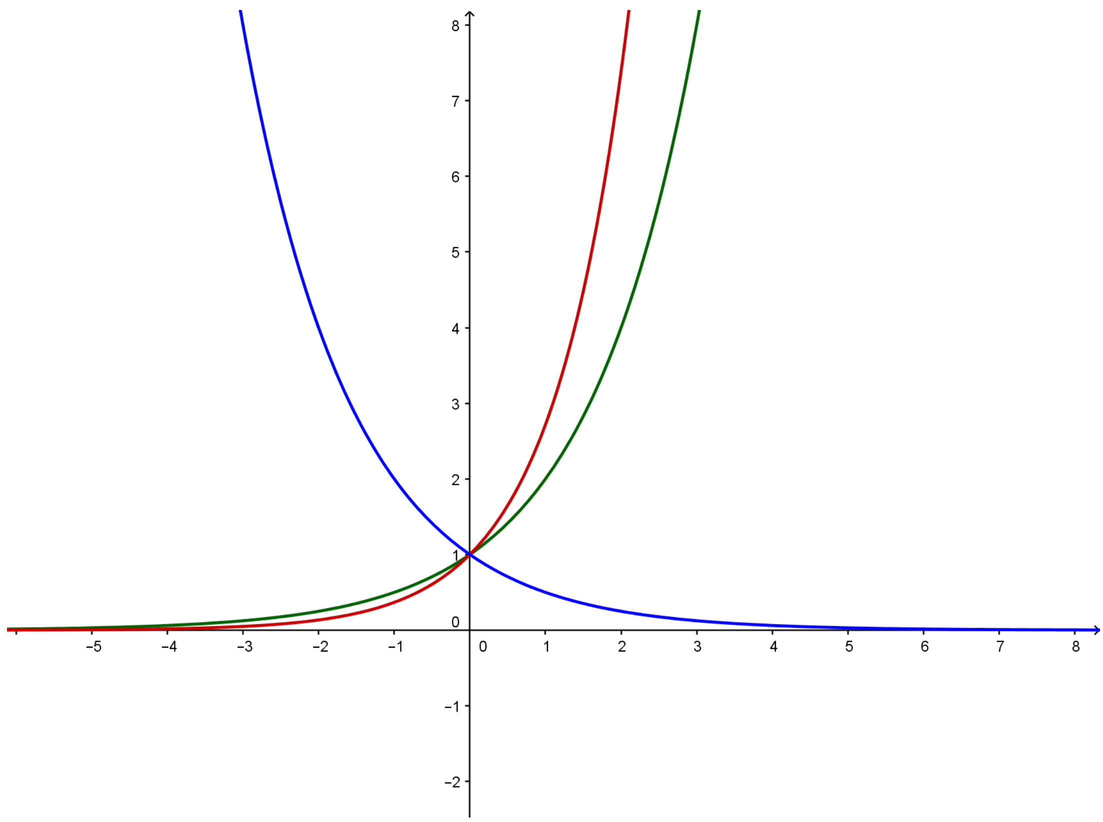
2. $a < 1$

   $y = a^x$ ist streng monoton fallend

   für $x \to \infty$ geht $y \to 0$

   und für $x \to -\infty$ geht $y \to \infty$

Beispiel 2.1 *$y = 2^x$ (grün), $y = (1/2)^x$ (blau) und $y = e^x$ (rot) mit der Eulerschen Zahl e heisst natürliche Exponentialfunktion.*



Alle Exponentialfunktionen sind also streng monoton. Die Umkehrfunktion existiert somit und wird Logarithmusfunktion genannt:

$$y = f^{-1}(x) \quad = \quad \log_a(x).$$

Die allgemeinen Eigenschaften, die Funktion und Umkehrfunktion miteinander verknüpfen, schreiben sich dann als:

$$\boxed{\begin{array}{lll} a^{\log_a(x)} = x & \text{für alle} & x > 0 \\[2ex] \log_a(a^x) = x & \text{für alle} & x \end{array}}$$

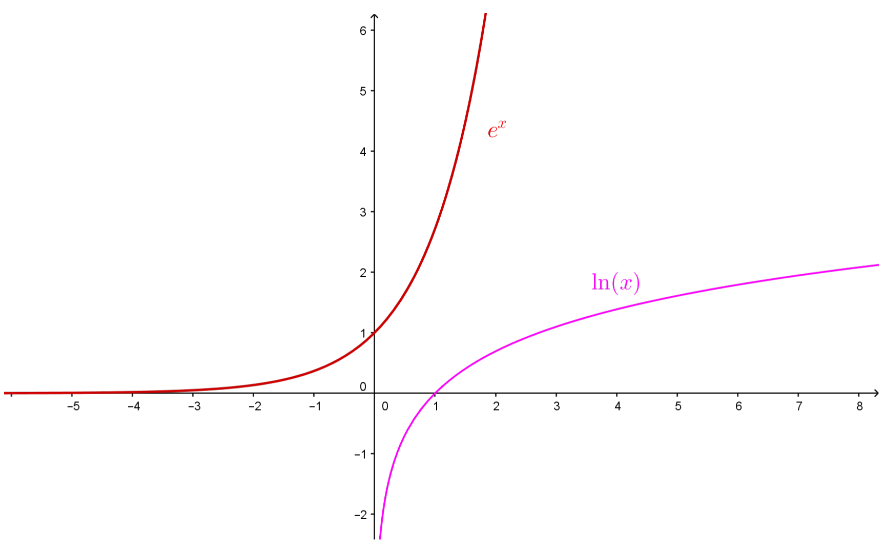
Dabei ist stets zu beachten, dass der Logarithmus nur für positive reelle Zahlen definiert ist. Man sollte sich beim Lösen von Logarithmengleichungen also zunächst überlegen, wo diese Gleichungen überhaupt definiert sind.

Die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion heisst natürlicher Logarithmus und wird mit $\ln(x) = \log_e(x)$ bezeichnet.

Wertetabelle:

x	e^x	$\ln(x)$
-2	0.1353	
-1		
- 0.5		nicht definiert
0		
0.01		
0.1		
0.5		
1		
2		
3	20.0855	1.0986
100		

Skizze:



Eigenschaften von $y = e^x$ und $y = \ln(x)$

Der wichtige Zusammenhang der beiden Funktionen lässt sich durch die beiden folgenden Gleichungen ausdrücken:

$$\boxed{e^{\ln(x)} = x \quad \text{und} \quad \ln(e^x) = x}$$

	$y = e^x$	$y = \ln(x)$
Definitionsbereich		
Wertebereich		
Monotonie	streng monoton wachsend	streng monoton wachsend
Spezielle Werte		
Grenzwerte		

Rechenregeln

Sei wieder $a > 0$ und $a \neq 1$ eine reelle Zahl.

Dann gelten für alle reellen Zahlen r, s die folgenden Potenzgesetze:

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = (a^s)^r = a^{r \cdot s}$
4. Jede positive Zahl c kann als Potenz zur Basis a dargestellt werden:
$$c = a^{\log_a(c)} = a^{\frac{\ln(c)}{\ln(a)}}.$$

Für alle positiven reellen Zahlen $u > 0$ und $v > 0$ gelten die folgenden Logarithmengesetze:

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^w) = w \cdot \log_a(u)$
4. Jede Zahl b kann als Logarithmus zur Basis a dargestellt werden:
$$b = \log_a(a^b).$$

Anwendung: Umrechnen von Logarithmen

Der Taschenrechner erlaubt es uns, Logarithmen zur Basis 10 und natürliche Logarithmen auszurechnen, nicht aber Logarithmen zu einer beliebigen Basis a. Wir wollen deshalb eine Umrechnungsformel angeben.

Satz 1 *Sei $a > 0$ und $a \neq 1$ eine reelle Zahl und $u > 0$. Dann gilt:*

$$\boxed{\log_a(u) = \frac{\log_{10}(u)}{\log_{10}(a)} = \frac{\ln(u)}{\ln(a)}}$$

Beweis: Wir suchen $\log_a(u) =: z$, und das heisst $a^z = u$. Dann ergibt sich die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned} & a^z && = u \\ \Rightarrow\quad & \ln(a^z) && = \ln(u) \\ \Rightarrow\quad & z \cdot \ln(a) && = \ln(u) \quad \text{(mit Regel 3)} \\ \Rightarrow\quad & z && = \frac{\ln(u)}{\ln(a)} = \log_a(u). \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$\log_7(53) = \frac{\ln(53)}{\ln(7)} \approx \frac{3.970}{1.946} \approx 2.040$$

3 Exponential- und Logarithmengleichungen

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, in der die Unbekannte im Exponenten einer Potenz vorkommt. Eine Logarithmengleichung ist eine Gleichung, in der die Unbekannte als Argument eines Logarithmus vorkommt.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 3^{x-2} &= 10 \\ e^{x^2+4} &= 8 \\ 10^{-4x+3} &= -2 \\ \\ \log_{10}(x-1) &= 1 \\ \ln(x^2+2) &= 4 \\ \ln(4x)-\ln(x-1) &= \ln(2) \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungstypen beruht ganz wesentlich darauf, dass man den Effekt der Exponential- bzw. der Logarithmusfunktion durch die jeweils andere Funktion neutralisieren kann.

Beispiel für eine Exponentialgleichung: Wir wollen die Exponentialgleichung

$$3^{x^2-4} = 6^{-x}$$

lösen. Man sieht schnell, dass alle Terme der Gleichungen auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Wir erhalten die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned} & 3^{x^2-4} &&= 6^{-x} && \mid \ln(..) \\ \Longleftrightarrow\ & \ln(3^{x^2-4}) &&= \ln(6^{-x}) && \\ \Longleftrightarrow\ & (x^2-4)\ln 3 &&= -x\ln 6 && \mid : \ln 3 \text{ und ordnen} \\ \Longleftrightarrow\ & x^2+\frac{\ln 6}{\ln 3}\,x-4 &&= 0 && \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung, die mit den uns bekannten Mitteln gelöst werden kann. Man erhält $x_1 \approx -2.98$ und $x_2 \approx 1.34$.

Beispiel für eine Logarithmengleichung: Wir wollen die Logarithmengleichung

$$\log_2(x^2+1) \quad = \quad \log_2(4x^2-1)$$

lösen. Zunächst müssen wir hier beachten, dass der Logarithmus nur für echt positive Werte definiert ist. Der Term x^2+1 ist stets positiv und der zweite Term gibt uns die folgende Einschränkung für den Lösungsbereich der Gleichung:

$$\begin{array}{rlcl} & 4x^2-1 & > & 0 \\ \iff & 4x^2 & > & 1 \\ \iff & x^2 & > & \frac{1}{4} \\ \iff & |x| & > & \frac{1}{2} \end{array}$$

Der Definitionsbereich unserer Gleichung ist somit $D = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$, d.h. wenn es überhaupt Lösungen geben kann, dann in diesem Bereich.

Wir erhalten nun die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{array}{rlcll} & \log_2(x^2+1) & = & \log_2(4x^2-1) & |2^{(\cdot)} \\ \implies & x^2+1 & = & 4x^2-1 & \\ \iff & 3x^2 & = & 2 & \\ \iff & x^2 & = & \frac{2}{3} & \\ \iff & x & = & \pm\sqrt{\frac{2}{3}} & \end{array}$$

Hier sollte man die Probe nicht vergessen, denn wir haben mindestens eine Nichtäquivalenzumformung vorgenommen. Beide Werte sind tatsächlich Lösungen der Ausgangsgleichung, denn für die linke und rechte Seite der Ausgangsgleichung gilt:

$$\begin{array}{rcl} \log_2\left(\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2+1\right) & = & \log_2\left(\dfrac{5}{3}\right) \\ \log_2\left(4\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2-1\right) & = & \log_2\left(\dfrac{5}{3}\right) \end{array}$$

4 Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$a) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{5n}\right)^{n}$$

$$b) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n+2}$$

$$c) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{13}{2n}\right)^{n/2}$$

2. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

$$a) \qquad (3^{x-3})^{x+3} = (3^{x+2})^{x-3}$$

$$b) \qquad 4(4^{x+2})^{x-5} = 4^{3x-2}\cdot(4^{x})^{x-4}$$

$$c) \qquad \sqrt{5^{4x-8}} = \sqrt[3]{5^{9x+1}}$$

3. Berechnen Sie x aus den folgenden Gleichungen.

$$a) \qquad \log_{0.5}(256) = x^3$$

$$b) \qquad \log_x(2) = -\frac{2}{3}$$

$$c) \qquad \log_2(\sqrt{x}) = -2$$

$$d) \qquad 2^{x\cdot\ln(x)} = 3^{\ln(x)}$$

4. Das BIP eines Landes mit der Anfangsgrösse 1'000'000'000,- habe eine Wachstumsrate von 10% pro Jahr.
   (a) Wie gross ist das BIP nach 10 Jahren.
   (b) Nach wievielen Jahren hat sich das BIP vedoppelt?

5. Berechnen Sie x aus den folgenden Gleichungen.

$$a) \qquad \log_b(x) = \log_b(w) + \frac{1}{2}\log_b(u) - \frac{3}{4}\log_b(v)$$

$$b) \qquad \ln(x) = \ln(\sqrt{a-b}) + \frac{1}{2}\ln(a+b) - \frac{1}{3}\ln(a^2-b^2)$$

$$c) \qquad \ln(\sqrt{1+x}) - \frac{1}{2}\ln(1-x) = \log_{10}(10^{\ln(\sqrt{9})})$$

6. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

$$a) \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-17}$$

$$b) \qquad 3^{x+2} - 3^{x-2} = 2^{x+2} - 2^{x-2}$$

5 Lösungen der Aufgaben

1. $a)\ \ e^{3/5}\ \ ,\ b)\ \ e^{-3}\ \ ,\ c)\ \ e^{13/4}$

2. $a)\ \ x = 3\ \ ,\ b)\ \ x = -7/2\ \ ,\ c)\ \ x = -13/3$

3. $a)\ \ x = -2\ \ ,\ b)\ \ x = 1/2^{3/2} = 1/\sqrt{8} = \sqrt{2}/4,$
   $c)\ \ x = 1/16\ \ ,\ d)\ \ x = 1$ oder $x = \ln(3)/\ln(2)$

4. $a)\ \ 2'593'742'460,-\ \ ,\ b)$ 8 Jahre

5. $a)\ \ x = \frac{w\cdot\sqrt{u}}{\sqrt[4]{v^3}}\ \ ,\ b)\ \ x = \sqrt[6]{a^2 - b^2}\ \ ,\ c)\ \ x = 0.8$

6. $a)\ \ x = \dfrac{7\ln(3/2) - 17\ln(2/3)}{5\ln(3/2) - 3\ln(2/3)}\ \ =\ \ 3\ \ ,\ b)\ \ x = \dfrac{\ln(27/64)}{\ln(3/2)}$