Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs
Dr. Thomas Zehrt

Funktionen 1

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

Definition 1.1 *Seien X und Y zwei beliebige Mengen. Eine Vorschrift, die jedem Element x aus der Menge X ($x \in X$) genau ein Element y aus der Menge Y ($y \in Y$) zuordnet, heisst Funktion.*

Die Menge X heisst der Definitionsbereich und die Menge Y der Wertebereich von f. Die Menge

$$f(X) \;=\; \{\, f(x) \;:\; x \in X \,\} \;=\; \{\, y \in Y \;:\; \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } f(x) = y \,\} \subset Y$$

heisst die Bildmenge von f.

Eigentlich besteht eine Funktion aus **drei** Daten:

- Definitionsbereich X
- Wertebereich Y
- Zuordnungsvorschrift f

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \qquad \text{oder} \end{aligned}$$

$$f : x \longmapsto f(x)$$

Eine gute und allgemeine Art, um sich Funktionen zu visualisieren ist es, die Mengen X und Y (symbolisch) zu zeichnen und Pfeile von Elementen aus X auf die zugeordneten Elemente in Y zu zeichnen.

Wichtig!

Wir wollen uns angewöhnen, zwischen der Funktion f und $f(x)$ konsequent zu unterscheiden:

f	die Funktion, d.h. eine **Vorschrift**, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet.
$f(x)$	Wert der Funktion f an der Stelle x, d.h. $f(x)$ ist ein **Element** der Menge Y.

Beispiel 1.1 *Wir betrachten die beiden Funktionen (in Kurzschreibweise):*

$$f(x) = x + 1 \qquad \textit{und} \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Beim Betrachten der Funktion g mag man sich sofort (!) an die dritte binomische Formel erinnern. Es gilt $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ und nach dem Kürzen ergibt sich $g(x) = x + 1$!? Also sind die beiden Funktionen gleich!?? Nein, was gleich ist, sind die Werte von f und g an allen **gemeinsamen** *Stellen der Definitionsbereiche. Genau genommen muss man beide Funktionen unter Angabe der Definitionsbereiche wie folgt schreiben:*

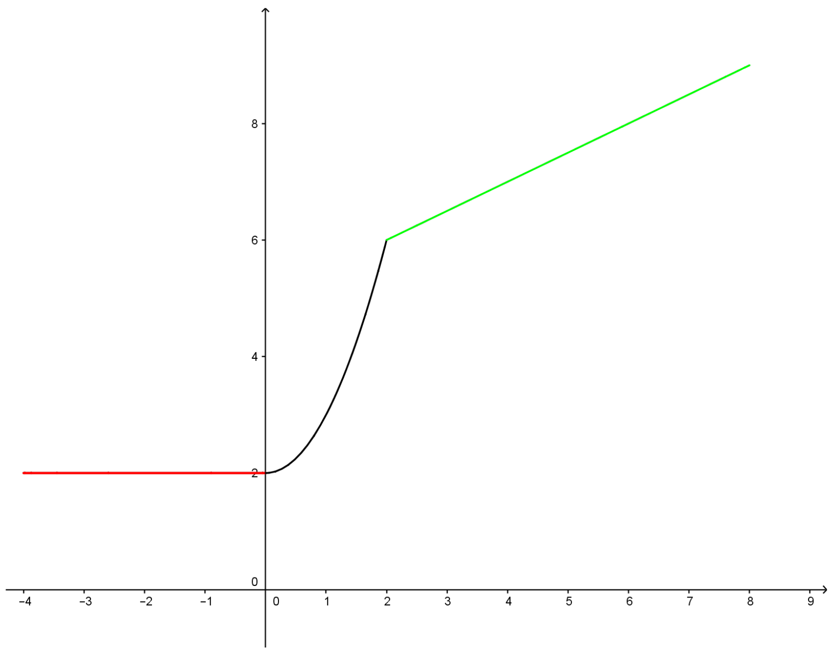
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \end{aligned}$$

und an dieser vollständigen Schreibweise erkennt man sofort den Unterschied zwischen den Funktionen f und g.

Beispiel 1.2 *Funktionen können auch stückweise definiert werden. Ein Beispiel ist die Funktion:*

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \textit{für } x < 0 \\ x^2 + 2 & \textit{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 5 & \textit{für } x > 2 \end{cases}$$



2 Der Graph einer Funktion

Wir beschränken uns hier auf Funktionen, deren Definitionsbereich $X = \mathbb{R}$ (oder $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und deren Wertebereich $Y = \mathbb{R}$ ist.

Sei die Funktion

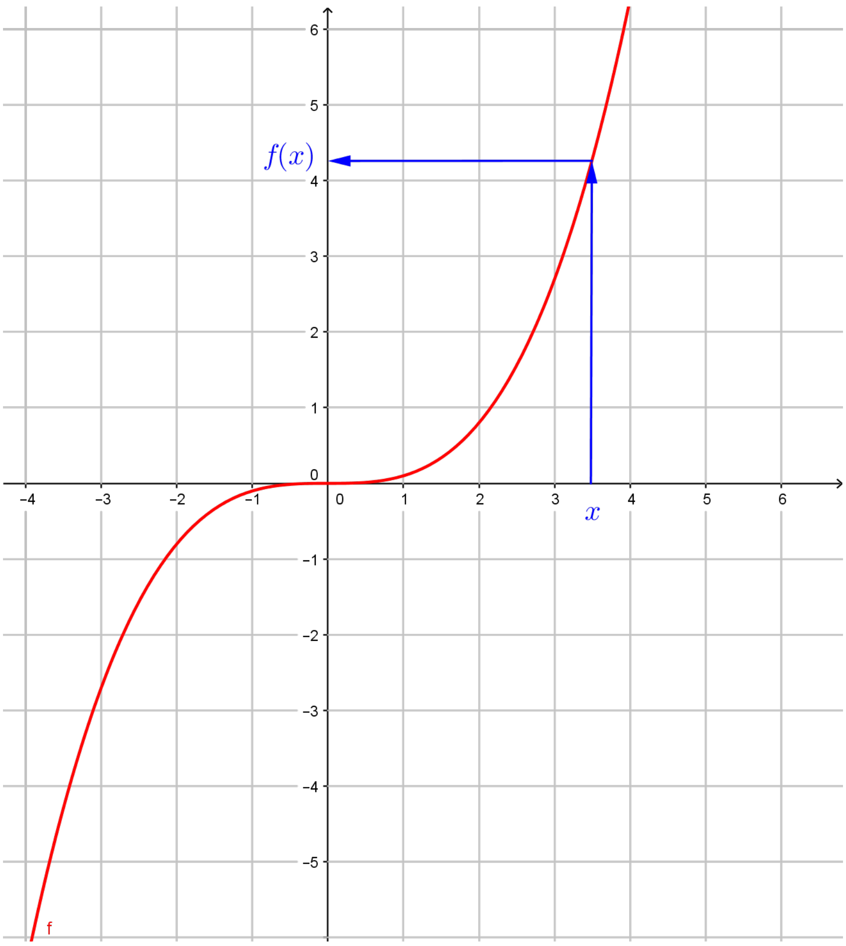
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

gegeben, so zeichnet man für jedes $x \in \mathbb{R}$ in der $x-y$-Ebene einen Punkt mit den Koordinaten $(x, f(x))$.

Formal und ganz allgemein lässt sich der Graph von f als Teilmenge des kartesischen Produktes der beiden Mengen X und Y schreiben:

$$Graph(f) \;:=\; \{\, (x, f(x)) \;:\; x \in X \,\} \subset X \times Y$$

Zudem kann man am Graphen von f auch die Zuordnungsvorschrift der Funktion erkennen.



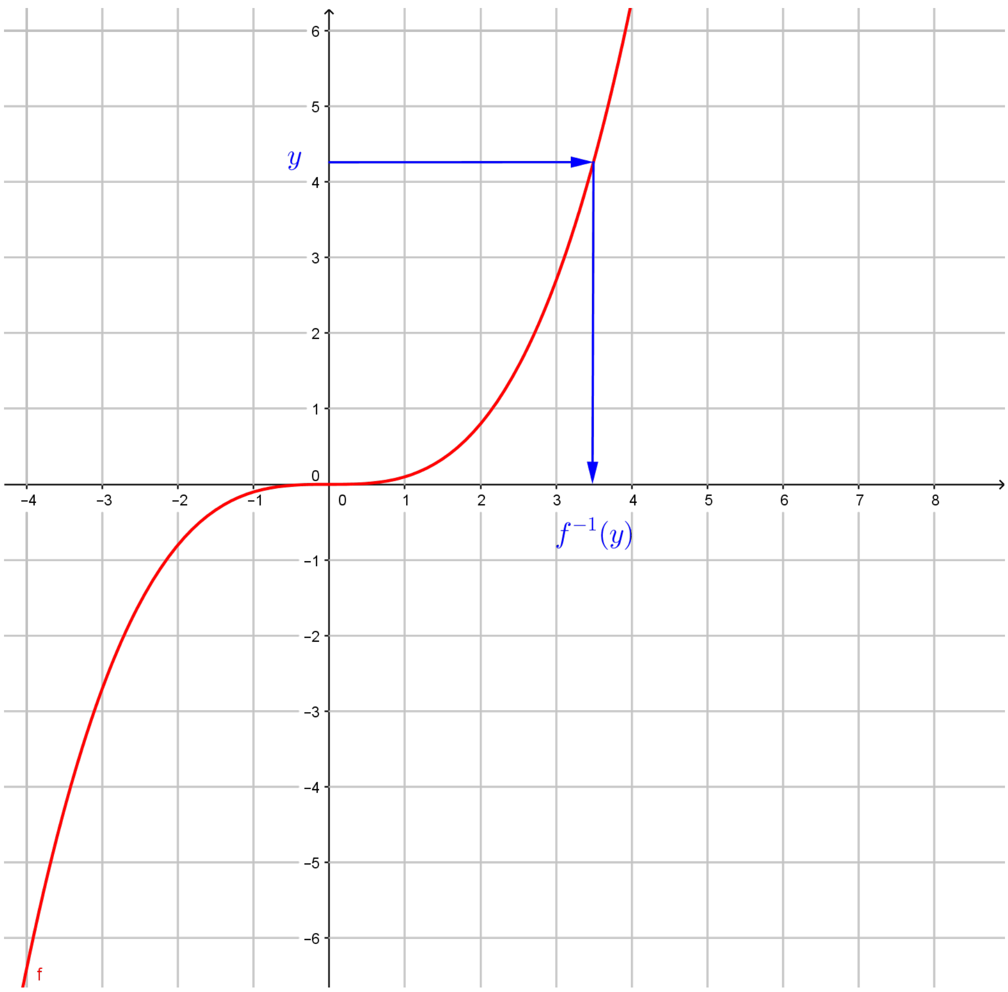
3 Umkehrbarkeit

Eine Funktion ordnet jedem Wert x des Definitionsbereichs **genau einen** Wert y des Wertebereichs zu. Es ist aber durchaus erlaubt, dass verschiedene x-Werte auf den selben y-Wert abgebildet werden. Schon an einfachen Beispielen kann man erkennen:

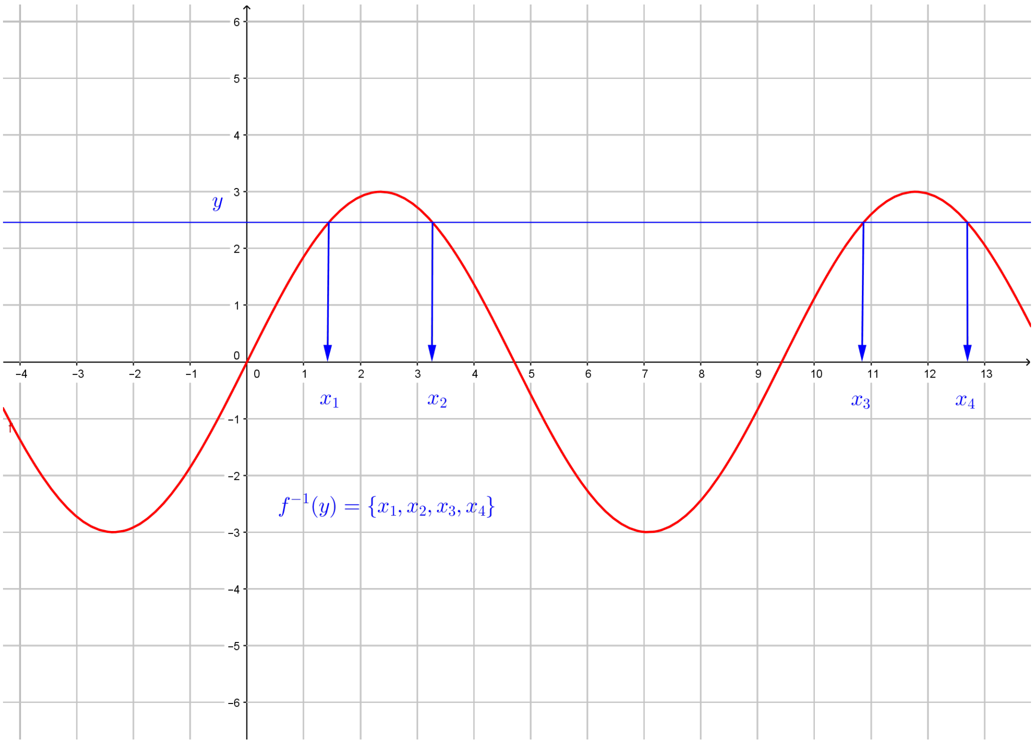
Nicht jede Funktion ist umkehrbar!

Man nennt Funktionen, bei denen die Umkehrung der zugrunde liegenden Zuordnung wieder eine Funktion ist, umkehrbare Funktionen. Eine umkehrbare Funktion hat also die Eigenschaft, dass keine zwei Elemente des Definitionsbereichs auf das selbe Element des Wertebereichs abgebildet werden. Auch am Graphen einer reellen Funktion kann man die Umkehrung der Funktion f, bzw. die eventuell auftretenden Probleme beim Umkehren, visualisieren

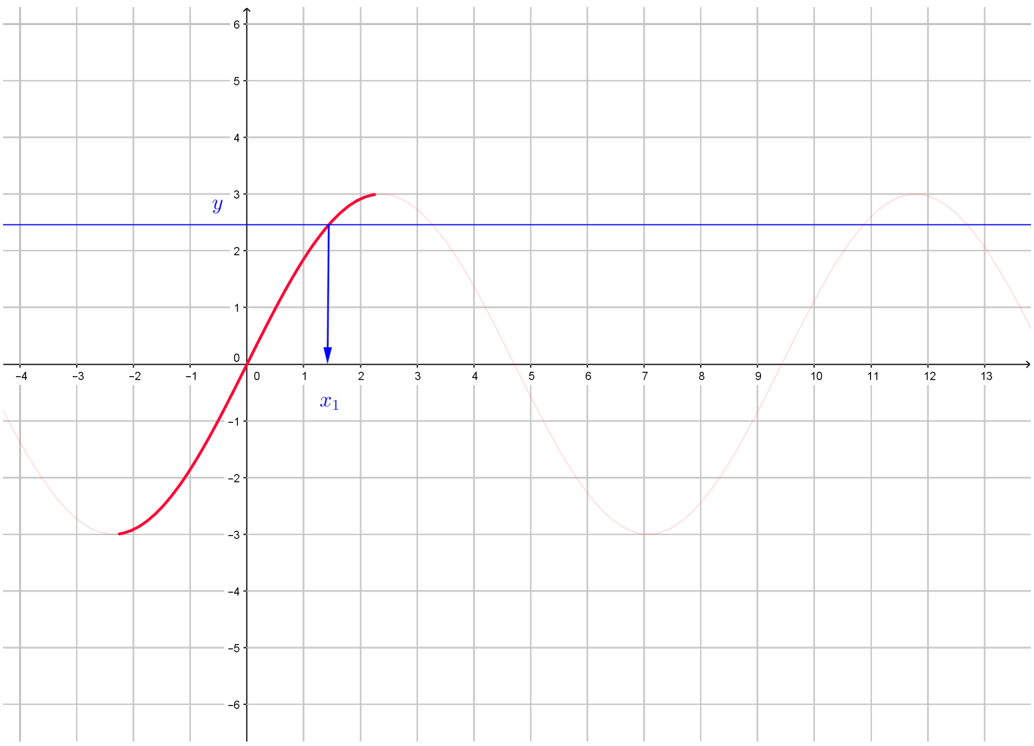
- Bei dieser Funktion funktioniert das Umkehren problemlos. Jedem y kann **genau ein** x mit $f(x) = y$ zugeordnet werden.



- Bei dieser Funktion kann für den Punkt y kein **eindeutig** bestimmtes x mit $f(x) = y$ gefunden werden. Es gibt hier (mindestens) vier Kandidaten und dieses Funktion ist somit nicht (eindeutig) umkehrbar.



Das ist ein typisches Vorgehen, durch geschicktes Verkleinern des Definitionsbereichs auf Monotonieintervalle kann man die Umkehrbarkeit ,,einer Funktion" erreichen.



Definition 3.1

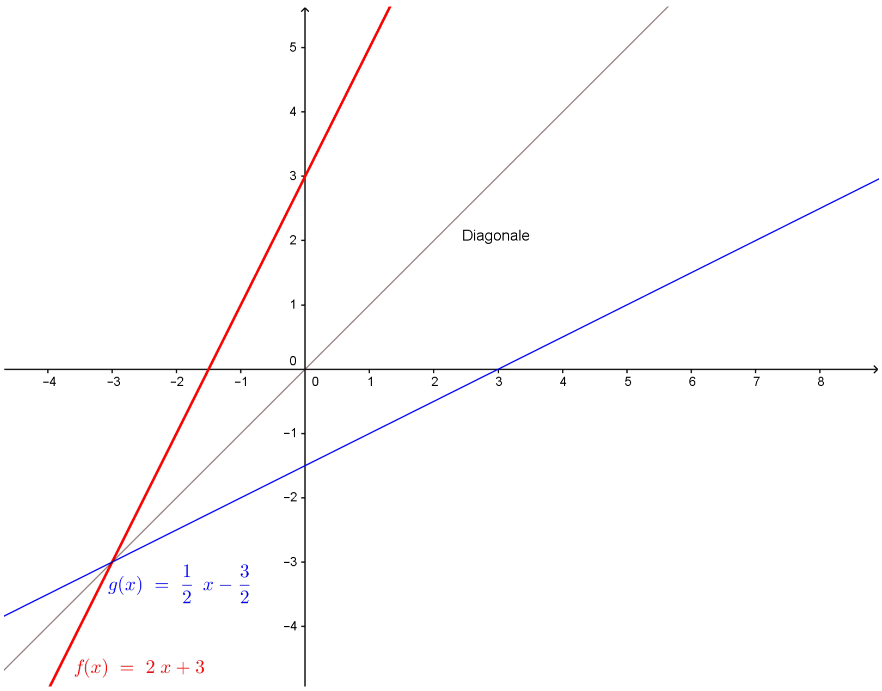
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $M \subset X$. Dann heisst f umkehrbar auf M, wenn jedes $y \in f(M)$ nur von genau einem Element aus M getroffen wird. Also: Für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt (muss gelten) $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Funktion, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das in diesem Fall **eindeutige** *x zuordnet, heisst Umkehrfunktion.*

Bezeichnung:

$$\begin{array}{rrcl} f^{-1}: & f(M) & \longrightarrow & M \\ & y = f(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

Beispiel 3.1 *Die Funktion $y = f(x) = 2x+3$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion erhält man hier, in dem man die Gleichung $y = 2x + 3$ nach x auflöst: $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.*

Meist tauscht man noch die Variablen x und y, damit man die beiden Funktionen problemlos im selben Koordinatensystem zeichnen kann.



Bemerkungen

1. Wendet man auf ein x zunächst eine umkehrbare Funktion f an und danach die Umkehrfunktion f^{-1} (auf $f(x)$), so erhält man wieder x zurück.

$f^{-1}(f(x)) = x$	$f(f^{-1}(y)) = y$

2. Den Graphen von f^{-1} erhält man, indem man den Graphen von f an der Geraden $y = x$ (Diagonale) spiegelt.

3. Am Graphen einer Funktion ist leicht zu erkennen, ob die Funktion umkehrbar ist. f ist genau dann umkehrbar, wenn **jede** Parallele zur x-Achse den Graphen in **höchstens** einem Punkt schneidet.

4 Wichtige Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion, deren Graph über dem gesamten Definitionsbereich mit wachsendem x ansteigt (oder abfällt) ist nach der letzten Bemerkung im vorhergehenden Kapitel umkehrbar. Solche Funktionen heissen auch monoton. Genauer gilt:

Definition 4.1 *Eine Funktion heisst*

monoton steigend	*falls gilt*	$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	*falls gilt*	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend	*falls gilt*	$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	*falls gilt*	$f(x_1) > f(x_2)$

für alle Paare $x_1 < x_2$.

Definition 4.2 *Eine Funktion heisst*

gerade	*falls* $f(-x) = f(x)$	*für alle* x
ungerade	*falls* $f(-x) = -f(x)$	*für alle* x

Die zwei typischen Beispiele für gerade und ungerade Funktionen sind sin (ungerade) und cos (grade). Geometrisch kann man beide Begriffe wie folgt deuten:

- gerade: Graph der Funktion kann durch Spiegelung an der y-Achse in sich überführt werden.
- ungerade: Graph der Funktion kann durch Spiegelung am 0-Punkt in sich überführt werden.

Definition 4.3 *Eine Funktion heisst*

nach oben beschränkt	*falls es eine Zahl* M *gibt, so dass* $f(x) \leq M$	*für alle* x
nach unten beschränkt	*falls es eine Zahl* m *gibt, so dass* $f(x) \geq m$	*für alle* x
beschränkt	*falls* f *nach oben* **und** *unten beschränkt ist*	

5 Komposition von Funktionen

Seien

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow Y \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

zwei Funktionen, so dass der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f enthalten ist. Dann kann man aus beiden Funktionen die so genannte zusammengesetzte Funktion oder Komposition von f und g bilden:

$$\begin{aligned} F = f \circ g : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

Natürlich ist F auf dem Definitionsbereich von g definiert.

Es gilt ausserdem:

Sind f und g umkehrbar, so ist auch die Komposition $f \circ g$ umkehrbar und es gilt

$$\boxed{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$$

Beispiel 5.1 *Die Funktion*

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

kann als Komposition der folgenden Funktionen betrachtet werden:

- $u = f_1(x) = x^2$, *das Element* x *wird quadriert.*
- $v = f_2(u) = u + 4$, *zum Ergebnis wird* 4 *addiert.*
- $w = f_3(v) = 1/v$, *der Kehrwert wird gebildet.*
- $y = f_4(w) = 3 \cdot w$, *das Ergebnis wird mit* 3 *multipliziert.*

Also kann f *wie folgt geschrieben werden:*

$$f(x) = \underbrace{f_4(\underbrace{f_3(\underbrace{f_2(\underbrace{f_1(x)}_{u})}_{v})}_{w})}_{y}.$$

6 Aufgaben

1. Gemäss den Richtlinien für die Schweizerische Maturitätsprüfung in Mathematik (normales Niveau) können Sie die folgenden so genannten elementaren Funktionen beschreiben und erkennen: konstante Funktion, Identität, lineare Funktion, Quadratwurzelfunktion, Potenzfunktion, Betragsfunktion, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, a^x, $\ln(x)$ und $\log_a(x)$. Können Sie von diesen Funktionen, **ohne** einen Taschenrechner zu benutzen, eine (grobe, aber qualitativ richtige) Skizze anfertigen?

2. Geben Sie den grösstmöglichen Definitionsbereich $D(f) \subset \mathbb{R}$ für die Funktionen an.

$$a) \qquad f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$$

$$b) \qquad f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$c) \qquad f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

3. Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Monotonie und begründen Sie Ihre Aussage.

$$a) \qquad f(x) = \frac{1}{5}\,x^5$$

$$b) \quad f(x) = \ln(x^3) \qquad x > 0$$

$$c) \qquad f(x) = \frac{2}{x^2} \qquad x > 0$$

$$d) \quad f(x) = 2 - \frac{2}{x} \qquad x > 0$$

4. Skizzieren Sie die folgenden Funktionen. Welche Eigenschaften haben diese Funktionen?

$$a) \qquad f(x) = x^3$$

$$b) \qquad f(x) = \sqrt{x} \qquad x \geq 0$$

$$c) \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad x \neq -1$$

$$d) \quad f(x) = |x-1| \qquad x > 0$$

$$e) \quad f(x) = (x-1)^2$$

$$f) \quad f(x) = 3 - \frac{2}{x} \qquad x > 0$$

5. Geben Sie für die Funktion $f(x) = 2e^{-x} + 3$ den Definitions- und Wertebereich an, berechnen Sie die Umkehrfunktion zu f und geben Sie auch deren Definitions- und Wertebereich an.

6. Bestimmen Sie $f \circ f \circ f$, wenn $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ mit $D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ (reelle Zahlen ausser 0 und 1) ist. Was ist der maximale Definitionsbereich der Komposition?

   Hinweis: $f \circ f \circ f(x) \;=\; f(f(f(x))) \;=\; \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}}$

7 Lösungen der Aufgaben

1. –

2. *a*) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \geq -1 \text{ und } x \neq 2\}$,

   b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; -2 \leq x \leq 2\}$,

   c) $D(f) = (-2, 0]$

3. a) streng monoton wachsend ,

   b) streng monoton wachsend ,

   c) streng monoton fallend,

   d) streng monoton wachsend

4. a) unbeschränkt, streng monoton wachsend und ungerade

   b) nach unten beschränkt, streng monoton wachsend

   c) unbeschränkt

   d) nach unten beschränkt

   e) nach unten beschränkt

   f) nach oben beschränkt, streng monoton wachsend

5. $D(f) = \mathbb{R}, \; W(f) = (3, \infty)$

   $f^{-1}(x) = -\ln\left(\frac{x-3}{2}\right), \; D(f^{-1}) = (3, \infty), \; W(f^{-1}) = \mathbb{R}$

6. $(f \circ f \circ f)(x) = x \quad \text{mit } D(f \circ f \circ f) = \mathbb{R}$

   Man sollte aber besser sagen, dass $(f \circ f \circ f)(x) = x$ für alle $x \neq 0, 1$ gilt.