Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs

Dr. Thomas Zehrt

Funktionen 2

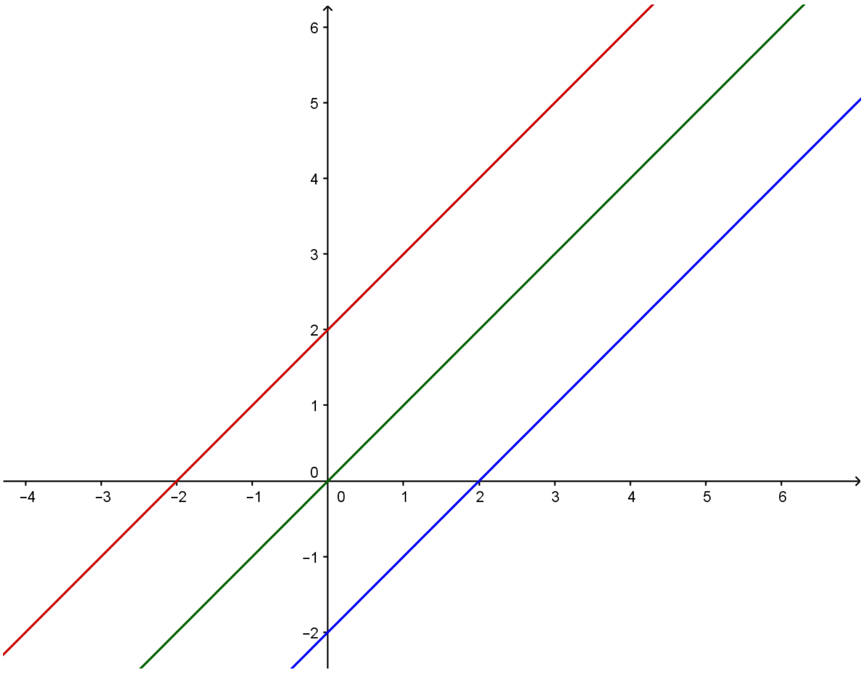
Inhaltsverzeichnis

1 Translationen

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Die Funktion

$$\begin{array}{rcl} t_c : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + c \end{array}$$

heisst Translation oder Verschiebung um c. Die Graphen der Translationen für $c = -2, 0, 2$ sind in der folgenden Skizze dargestellt.



Sei f eine beliebige Funktion und c eine reelle Zahl. Dann können wir die Komposition(en) von f mit der Translation t_c betrachten. Offenbar gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu tun.

- $t_c \circ f : x \longmapsto f(x) + c$

  Der Graph von $t_c \circ f$ entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um c Einheiten in Richtung der y-Achse.

  Dabei bedeuten positive c eine Verschiebung nach oben.

- $f \circ t_c : x \longmapsto f(x + c)$

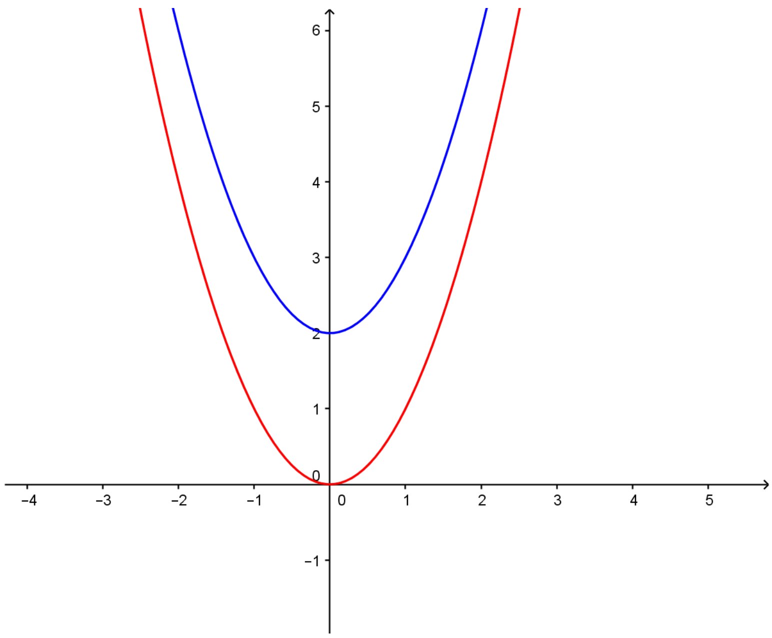
  Der Graph von $f \circ t_c$ entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um $-c$ Einheiten in Richtung der x-Achse. Dabei bedeuten positive c eine Verschiebung nach **links**.

Beispiel

Sei $c = 2$ und $f(x) = x^2$. Dann ist

$$t_2 \circ f : x \longmapsto x^2 + 2$$

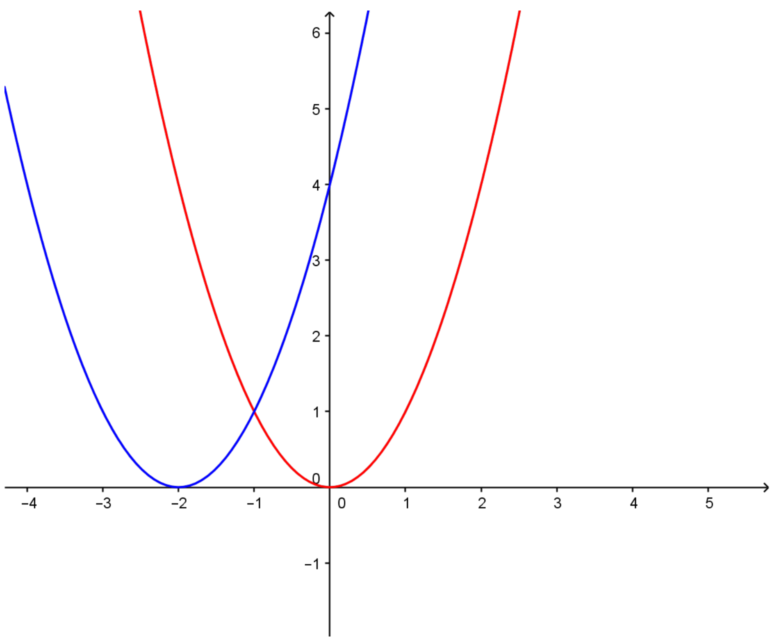
und der Graph von $t_2 \circ f$ entsteht durch Anheben des Graphen von f um 2 Einheiten.



Kehren wir die Reihenfolge um, so gilt

$$f \circ t_2 : x \longmapsto (x+2)^2.$$

Wie sieht der Graph dieser Funktion aus? Er entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um 2 Einheiten nach **links**!

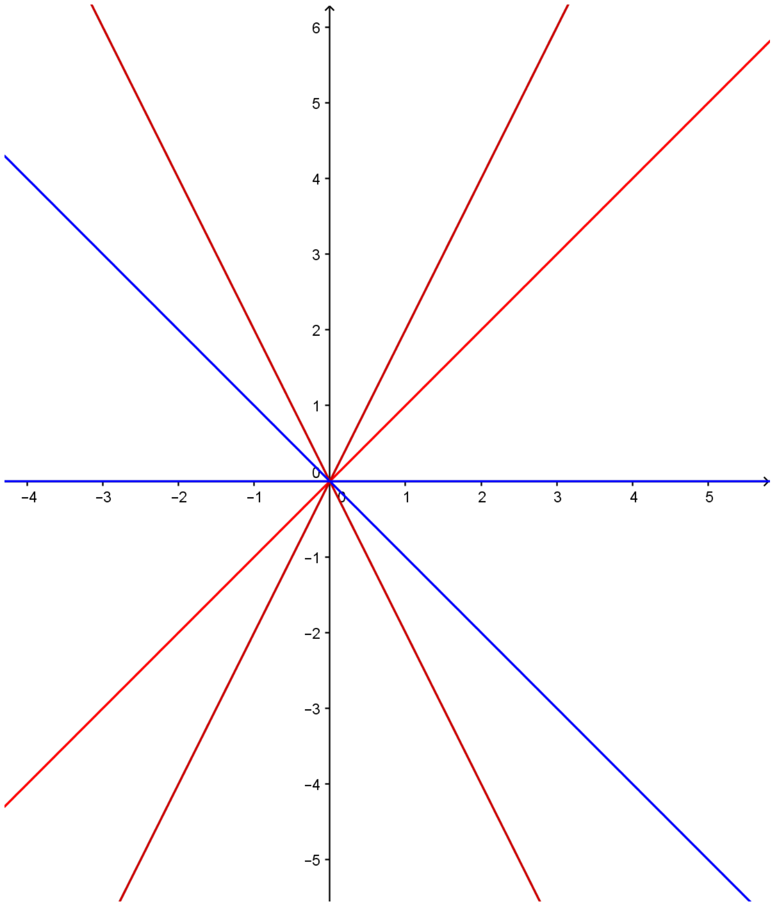


2 Skalierungen

Sei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl. Die Funktion

$$\begin{aligned} s_c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \cdot x \end{aligned}$$

heisst Skalierung mit der Konstanten c. Die Graphen der Skalierungen für $c = -2, -1, 0, 1, 2$ sind in der folgenden Skizze dargestellt.



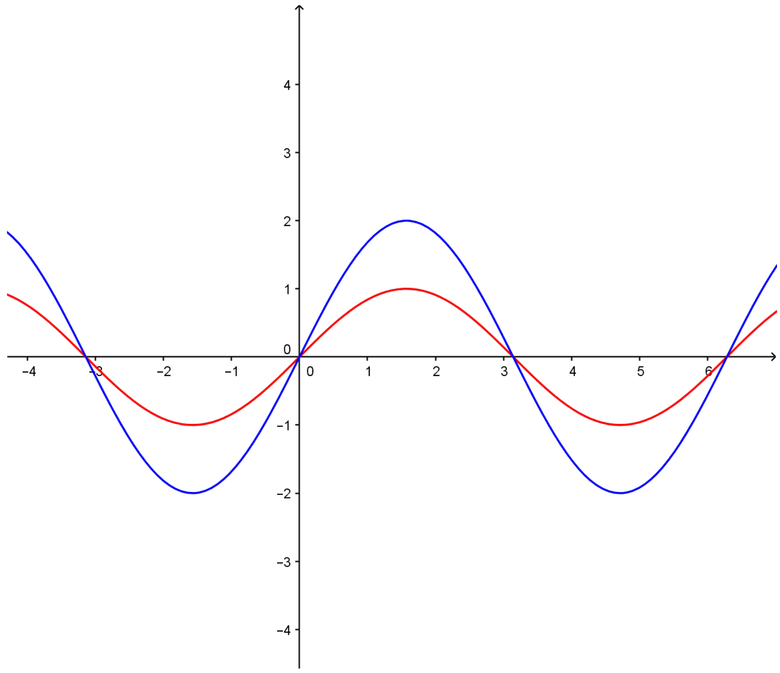
Eine Skalierung bedeutet zunächst nichts anderes als eine Änderung der Skala (oder des Massstabs) und je nach dem wie man eine Skalierung mit einer Funktion komponiert, ändert sich der Massstab auf der x- bzw. y-Achse.

Beispiel:

Sei $c = 2$ und $f(x) = \sin(x)$. Dann ist

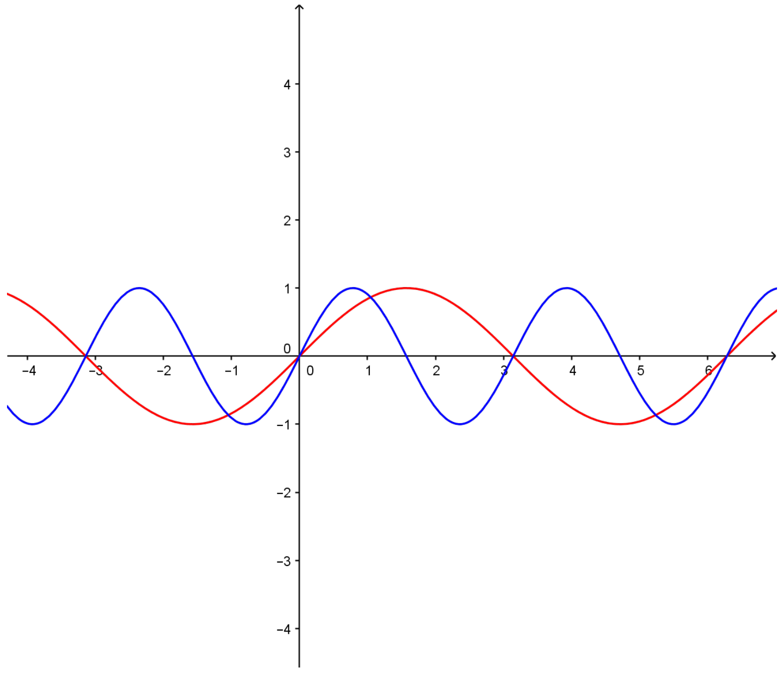
$$s_2 \circ f : x \quad \longmapsto \quad 2 \cdot \sin(x)$$

und der Graph von $s_2 \circ f$ (blau) entsteht aus dem Graphen von f (rot), indem jeder y-Wert verdoppelt wird.



Kehren wir die Reihenfolge um, so gilt

$$f \circ s_2 : x \quad \longmapsto \quad \sin(2 \cdot x).$$



Hier verdoppelt sich die ,,Durchlaufgeschwindigkeit“, d.h. der neue Graph (blau) durchläuft 2 ganze Perioden, wenn der alte Graph (rot) nur eine Periode durchläuft.

3 Die Wurzelfunktion

Wir betrachten zunächst die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Ist f umkehrbar? Nein, denn z.B. gilt $f(-2) = f(2) = (-2)^2 = 2^2 = 4$ und der Wert 4 wird von f (genau) zweimal getroffen. Somit weiss man nicht, welchen Wert man bei der Konstruktion der Umkehrfunktion der 4 zuordnen sollte, 2 oder -2?

Verkleinern wir deshalb den Definitionsbereich von f (so wenig wie möglich)! Indem wir die Quadratfunktion nur auf dem positiven Teil der x-Achse betrachten, erhalten wir die umkehrbare Funktion:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen verallgemeinern wir nun auf alle Potenzfunktionen.

Definition 3.1 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

umkehrbar. Die zugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} := \sqrt[n]{\cdot}$ wird als Wurzelfunktion bezeichnet:

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen heisst Radikand.

Rechnen mit Wurzeln

Die Rechenregeln für Potenzen

$$\begin{array}{|llll|} \hline 1. & a^r \cdot a^s & = & a^{r+s} \\ 2. & \frac{a^r}{a^s} & = & a^{r-s} \\ 3. & (a^r)^s & = & (a^s)^r = a^{r\cdot s} \\ \hline \end{array}$$

lassen sich mit der Entsprechung $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ direkt auf Wurzeln übertragen. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\begin{array}{|lllllll|} \hline \sqrt[n]{x^m} & = & (x^m)^{\frac{1}{n}} & & & = & x^{\frac{m}{n}} \\ \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} & = & x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} & = & (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} & = & \sqrt[n]{x \cdot y} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} & = & (x^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} & = & x^{\frac{1}{m \cdot n}} & = & \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} \\ \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} & = & \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} & = & \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} & = & \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \\ \hline \end{array}$$

4 Polynome

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a_n \neq 0$. Dann heisst die Funktion

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{aligned}$$

oder kurz $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ein Polynom vom Grad n. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ heissen die Koeffizienten von p.

4.1 Polynome vom Grad 0

Ein Polynom vom Grad 0 ist eine konstante Funktion $p(x) = a_0 \in \mathbb{R}$. Ihr Graph ist eine Parallele zur x-Achse.

4.2 Polynome vom Grad 1

Ein Polynom vom Grad 1 hat die Gestalt

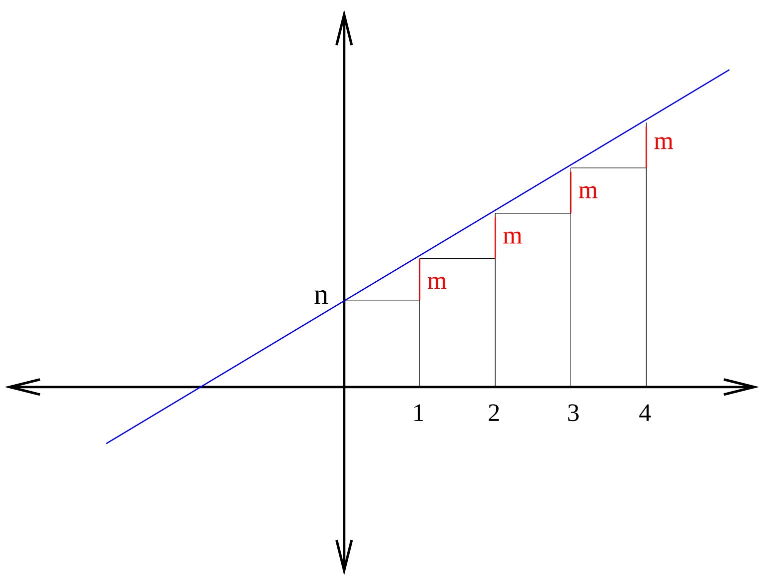
$$p(x) = a_0 + a_1 x = mx + n.$$

Wir haben dabei die gebräuchlichere Schreibweise mit den reellen Zahlen m und n gewählt. Der Graph von p ist eine Gerade und diese Gerade schneidet die y-Achse (d.h. es gilt $x = 0$) bei $p(0) = n$.

Falls der Wert von p (für irgend ein x) um 1 erhöht wird, gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} p(x+1) &= m(x+1) + n \\ &= mx + n + m \\ &= p(x) + m, \end{aligned}$$

d.h. der Wert von p erhöht sich unabhängig vom gewählten x-Wert um m.



4.3 Polynome vom Grad 2

Ein Polynom vom Grad 2 hat die Gestalt

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \;=\; ax^2 + bx + c.$$

Wir haben dabei die gebräuchlichere Schreibweise mit den reellen Zahlen a, b und c gewählt. Der Graph von p ist eine sogenannte Parabel, die die y-Achse im Punkt c schneidet. Zunächst gilt (Probe machen!)

$$p(x) \;=\; ax^2 + bx + c \;=\; a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Aus dieser Darstellung, die auch als Scheiteldarstellung bezeichnet wird, können wir viele Informationen über p direkt ablesen.

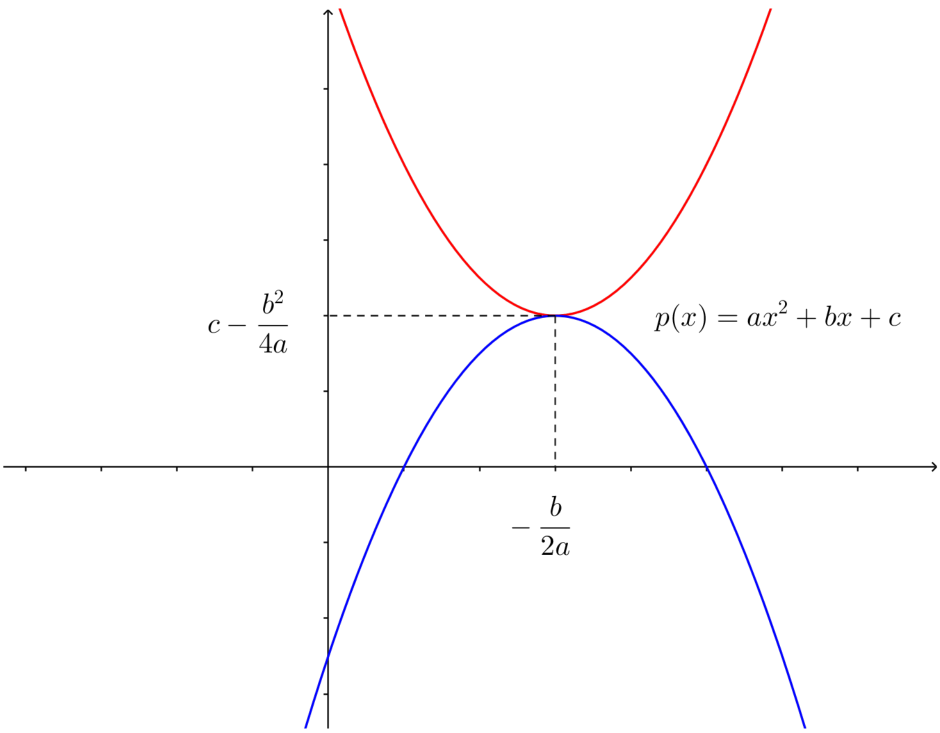
- Nehmen wir zunächst an, dass $\boxed{a > 0}$ ist. Dann gilt

  $$p(x) \;=\; \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \frac{b^2}{4a} + c \;\geq\; c - \frac{b^2}{4a},$$

  d.h. $p(x)$ ist für **jeden** Funktionswert x grösser oder gleich der Zahl $c - \dfrac{b^2}{4a}$.
  Der tiefste Punkt ist natürlich dort, wo der erste Summand verschwindet, also Null wird, was natürlich genau für $x = -\dfrac{b}{2a}$ geschieht.
  Der tiefste Punkt der Parabel, der sogenannte Scheitel, hat somit die Koordinaten

  $$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

- Falls $\boxed{a < 0}$ hat die Parabel den selben Scheitelpunkt wie im vorhergehenden Fall, allerdings ist der hier der höchste Punkt der nach unten geöffneten Parabel.



Beispiel 4.1 *Wir wollen den Scheitelpunkt der Parabel* $p(x) = 3x^2 - 12x + 19$ *bestimmen. Wir sehen sofort, dass* $a = 3$, $b = -12$ *und* $c = 19$ *gilt und erhalten mit der obigen Gleichung für den Scheitelpunkt*

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-\frac{-12}{2 \cdot 3},\ 19 - \frac{(-12)^2}{4 \cdot 3}\right) = (2,\ 7)$$

Zur Übung wollen wir noch die Scheitelgleichung dieses quadratischen Polynoms konstruieren, indem wir quadratisch ergänzen.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^2 - 12x + 19 \\ &= 3\left(x^2 - 4x + \frac{19}{3}\right) \\ &= 3\left(x^2 - 4x + (-2)^2 - (-2)^2 + \frac{19}{3}\right) \\ &= 3\left((x-2)^2 - 4 + \frac{19}{3}\right) \\ &= 3\,(x-2)^2 + 7. \end{aligned}$$

5 Rationale Funktionen

Seien p und q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist. Dann heisst die Funktion f, die durch

$$f(x) \quad := \quad \frac{p(x)}{q(x)}$$

gegeben ist, rationale Funktion. Der Definitionsbereich des Zähler- und Nennerpolynoms ist ganz $\mathbb{R}$, d.h. die rationale Funktion f ist überall dort definiert, wo das Nennerpolynom **nicht** Null ist:

$$D(f) \quad = \quad \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; q(x) \neq 0 \,\}.$$

Polynomdivision Ein wichtiges Hilfsmittel beim Umgang mit rationalen Funktionen ist die sogenannte Polynomdivision.

Dabei muss zunächst stets der Grad von p grösser oder gleich dem Grad von q sein. In Analogie zur Division mit Rest von zwei ganzen Zahlen kann man auch rationale Funktionen durch dieses Verfahren vereinfachen.

Beispiel zur Division mit Rest

Wir wollen die Division $\dfrac{153}{13} = 153 : 13$ mit Rest ausführen. Man errechnet:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 5 & 3 & : & 1 & 3 & = & 1\;\;1 \\
1 & 3 & & & & & & \\
\cline{1-2}
 & 2 & 3 & & & & & \\
 & 1 & 3 & & & & & \\
\cline{2-3}
 & 1 & 0 & & & & &
\end{array}$$

Also gilt:

$$\frac{153}{13} \quad = \quad 11 \quad \text{Rest } 10 \quad = \quad 11 + \frac{10}{13}$$

Beispiel zur Polynomdivision

Wir wollen die rationale Funktion

$$f(x) \quad = \quad \frac{p(x)}{q(x)} \quad = \quad \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1}$$

durch Polynomdivision vereinfachen und werden das Verfahren schrittweise erläutern.

1. Zunächst ergänzen wir alle ,,fehlenden“ Glieder im Zähler- und Nennerpolynom (und versehen diese Glieder mit dem Koeffizient 0). Dann schreiben wir den Bruchstrich als Division. Wir erhalten:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} \quad = \quad (x^3 + 2x^2 + 5x + 2) : (x^2 + \underbrace{0x}_{=0} + 1).$$

2. Wir nehmen das 1. Glied von p (d.h. x^3) und dividieren es durch das 1. Glied von q (d.h. x^2) und erhalten $\frac{x^3}{x^2} = x$. Dieses Ergebnis wird rechts vom Gleichheitszeichen notiert. Wir erhalten als vorübergehendes Resultat in unserem Rechenschema:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \end{array}$$

3. Dieser erste Term rechts vom Gleichheitszeichen wird nun mit q multipliziert und das Ergebnis dieser Multiplikation $(x^2+0x+1)\cdot x = x^3+0x^2+x$ von links beginnend unter p geschrieben:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \\ & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

4. Nun wird dieses Ergebnis vom unmittelbar darüber stehenden Teil des Polynoms p subtrahiert $(x^3 + 2x^2 + 5x) - (x^3 + 0x^2 + x) = 2x^2 + 5x$. Dieses Ergebnis wird nun wieder im Divisionsschema (an richtiger Stelle) eingetragen:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \\ & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{2-6} & & & 2x^2 & + & 4x & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

5. Zu diesem Term kommt nun noch der nächste bisher ungenutzte Term aus dem Polynom p hinzu, das ist hier die 2.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} (& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = & x \\ & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{2-6} & & & 2x^2 & + & 4x & + & 2 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

6. Nun wird das Verfahren, beginnend bei Schritt 2. mit dem neuen Polynom $2x^2 + 4x+2$ und dem alten Polynom q wiederholt. Man teilt also den 1. Summanden dieses neuen Polynoms ($2x^2$) durch den 1. Summanden von q (x^2) und erhält $2x^2 : x^2 = 2$. Dieses Ergebnis wird unser neues Glied rechts vom Gleichheitszeichen.

   Man erhält also nach Abarbeitung der Schritte 2. - 4. :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
(& x^3 & + & 2x^2 & + & 5x & + & 2 &) & : & (& x^2 & + & 0x & + & 1 &) & = x + 2 \\
 & x^3 & + & 0x^2 & + & x & & & & & & & & & & & & \\
\cline{2-6}
 & & & 2x^2 & + & 4x & + & 2 & & & & & & & & & & \\
 & & & 2x^2 & + & 0x & + & 2 & & & & & & & & & & \\
\cline{4-8}
 & & & & & 4x & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

   Hier sind wir nun fertig, denn $4x$ kann nicht weiter durch x^2 geteilt werden. Der Rest der Polynomdivision ist somit $4x$ und man erhält:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{x^2 + 1} = x + 2 \quad \text{Rest } 4x = x + 2 + \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

6 Aufgaben

1. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen (jede Teilaufgabe im selben Koordinatensystem). Kontrollieren Sie Ihre Skizzen mit Geogebra.

   (a)

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= x^3 \\ f_2(x) &:= (x+2)^3 \\ f_3(x) &:= x^3 - 3 \\ f_4(x) &:= (x+1)^3 - 1 \\ f_5(x) &:= 2x^3 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \frac{1}{x} \\ f_2(x) &:= \frac{1}{x-1} \\ f_3(x) &:= \frac{1}{x+1} \\ f_4(x) &:= \frac{1}{x-1} + 2 \\ f_5(x) &:= \frac{1}{x+1} + 2 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= |x| \\ f_2(x) &:= |x+1| \\ f_3(x) &:= |x| + 1 \\ f_4(x) &:= 2|x| \\ f_5(x) &:= |2x| \end{aligned}$$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Bei rationalen Ausdrücken soll die Vereinfachung dabei so erfolgen, dass im Nenner keine Wurzeln mehr vorkommen.

$$a) \quad \sqrt[5]{x^7 y^3 (2y)^{13}}$$

$$b) \quad \sqrt[4]{x^{-3}\sqrt{x^2y^3}y^3(5y)^3}$$

$$c) \quad \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$$

$$d) \quad \frac{2+3\sqrt{5}}{4-\sqrt{15}}$$

3. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke. Bei rationalen Ausdrücken soll die Vereinfachung dabei so erfolgen, dass im Nenner keine Wurzeln mehr vorkommen.

$$a) \quad \sqrt[3]{x^6(2y)^{12}}$$

$$b) \quad \sqrt[2]{\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y}}$$

$$c) \quad \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

4. Lösen Sie nach x auf.

$$a) \quad y = \frac{\sqrt{x+1}+5}{\sqrt{x+1}-3}$$

$$b) \quad y = 5^{3x-1}+7$$

5. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der folgenden Parabeln.

$$a) \quad f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$b) \quad f(x) = 4x^2 + 56x + 196$$

$$c) \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{2}$$

6. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten. Diese Aufgabe **kann** durch Polynomdivision gelöst werden, muss aber nicht.

$$(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2) \quad : (x-1) \quad = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$$

$$(x^7 - 4x^5 + x^2 + x - 2) \quad : (x+2) \quad = x^6 - 2x^5 + x - 1$$

$$(x^4 - x^3 - 2) \quad : (x^2-2) \quad = x^2 - x + 2 + \frac{-2x+2}{x^2-2}$$

7 Lösungen der Aufgaben

1. -
2. *a*) $4 \cdot 8^{1/5} \cdot (x^7 \cdot y^{16})^{1/5}$ oder $2^{13/5} \cdot x^{7/5} \cdot y^{16/5}$,
   b) $5^{3/4} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{15/8}$,
   c) $-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2$,
   d) $8 + 15\sqrt{3} + 12\sqrt{5} + 2\sqrt{15}$
3. *a*) $16x^2y^4$,
   b) $\sqrt[8]{x}\sqrt[6]{y}$,
   c) $\sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{1}{3}(\sqrt{35} + \sqrt{14})$
4. *a*) $x = \left(\frac{3y+5}{y-1}\right)^2 - 1$,
   b) $x = \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(y-7)}{\ln(5)} + 1\right)$
5. *a*) $(2, -2)$
   b) $(-7, 0)$
   c) $(-2, -9/2)$
6. -