

Universität Basel
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum
Abteilung Quantitative Methoden

Mathematischer Vorkurs
Dr. Thomas Zehrt

Geometrie

Inhaltsverzeichnis

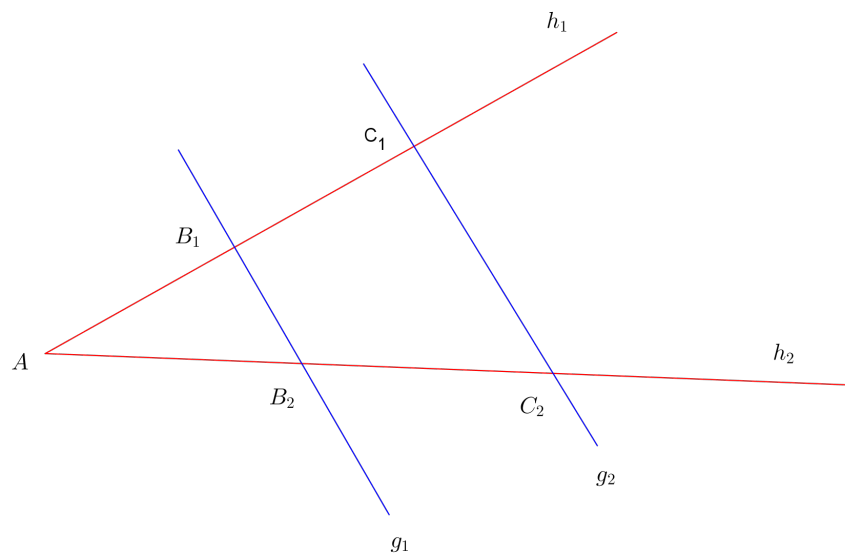
1	Die Strahlensätze	2
2	Winkel	3
3	Rechtwinklige Dreiecke	3
4	Kreise	6
5	Trigonometrische Funktionen	8
6	Kurven in Parameterdarstellung	10
7	Aufgaben	12
8	Lösungen der Aufgaben	13

1 Die Strahlensätze

Der Ausgangspunkt ist der folgende: Es seien vier Geraden g_1, g_2 und h_1, h_2 mit den Eigenschaften

- $g_1 \parallel g_2$ (die Geraden sind parallel)
- h_1 und h_2 schneiden sich in einem Punkt A

gegeben.



Satz 1 (Die Strahlensätze)

$$1. \quad \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}}$$

$$2. \quad \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{C_1C_2}}$$

$$3. \quad \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{AC_2}}$$

$$4. \quad \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{AC_1}}$$

2 Winkel

Winkel werden insbesondere in **Grad** und **Bogenmass** angegeben, allerdings werden wir Winkel meist im Bogenmass angeben, da diese Darstellung keine physikalische Masseinheit trägt. Die Umrechnung von beiden (Mass)Einheiten ineinander geschieht über eine Proportionalitätsgleichung.

Dabei muss man sich eigentlich nur die folgende Regel einprägen:

Grad		Bogenmass
360°	$=$	2π

Beispiele: Wir wollen einige gegebene Winkel in die jeweils andere Einheit umrechnen.

1. $220^\circ = x?$ (Bogenmass)

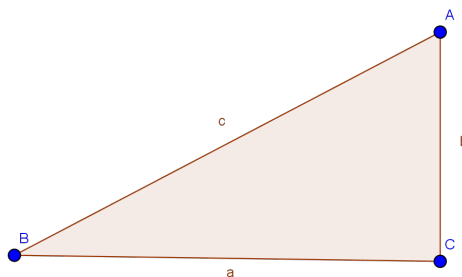
$$\frac{220^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \iff x = 2\pi \cdot \frac{220^\circ}{360^\circ} \approx 3.84$$

2. 7.21 (Bogenmass) $= x?$ (Grad)

$$\frac{x}{360^\circ} = \frac{7.21}{2\pi} \iff x = 360^\circ \cdot \frac{7.21}{2\pi} \approx 413.1^\circ$$

3 Rechtwinklige Dreiecke

Die beiden am rechten Winkel anliegenden Seiten a und b heissen Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heisst Hypotenuse.

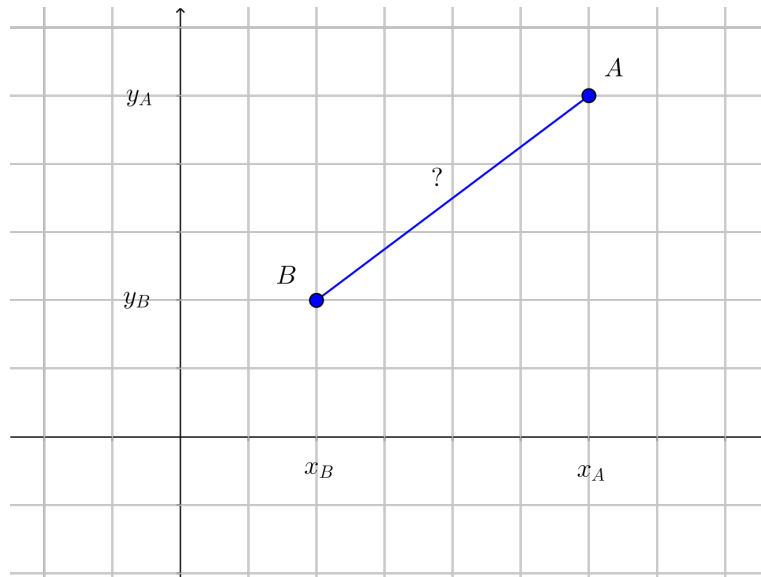


Satz 2 (Satz des Pythagoras) *In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate:*

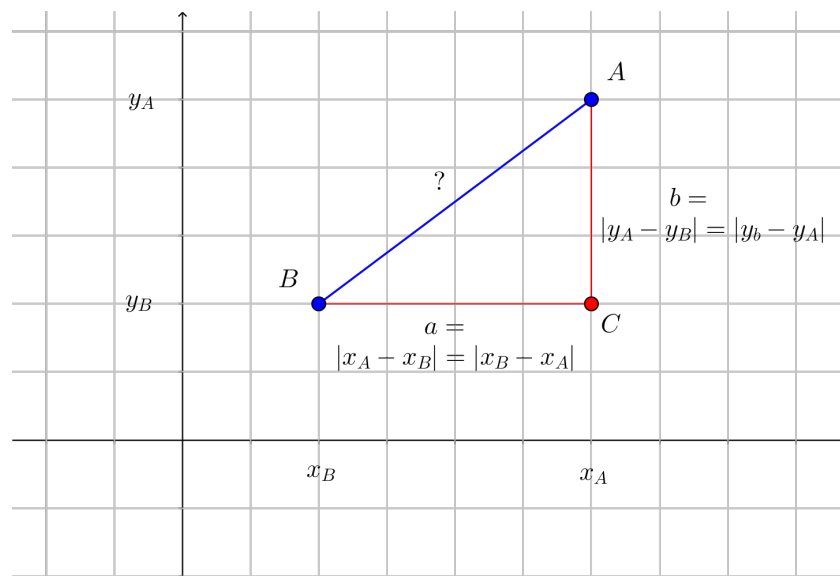
$c^2 = a^2 + b^2$

Anwendung:

Wir wollen den Abstand von zwei Punkten A und B in der $x - y$ -Ebene berechnen oder besser noch, wir wollen eine allgemeine Formel finden, die uns den Abstand von zwei Punkten als Funktion der Koordinaten dieser beiden Punkte ausgibt. Die Koordinaten von A seien (x_A, y_A) , die von B seien (x_B, y_B) .



Dazu definieren wir uns zunächst einen Hilfspunkt C in der $x - y$ -Ebene mit den Koordinaten (x_A, y_B) . Wir erhalten damit ein rechtwinkliges Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C .



In diesem rechtwinkligen Dreieck gilt der Satz des Pythagoras $?^2 = a^2 + b^2$ und die beiden Seitenlängen a und b lassen sich leicht durch die Koordinaten der Punkte A und B ausdrücken:

$$\begin{aligned}\overline{CB} = a &= |x_A - x_B| = |x_B - x_A| \\ \overline{CA} = b &= |y_A - y_B| = |y_B - y_A|.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit für den gesuchten Abstand:

$$\begin{aligned}\text{Abstand zwischen } A \text{ und } B &= \overline{AB} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\end{aligned}$$

Beispiel: Wir wollen den Abstand der beiden Punkte A und B mit den Koordinaten $(2, 7)$ und $(-1, 3)$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\text{Abstand zwischen } A \text{ und } B &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 7)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

4 Kreise

Mit Hilfe der bewiesenen Abstandsformel können wir nun Kreise im $\mathbb{R}^2$ beschreiben. Im allgemeinen ist ein Kreis mit Mittelpunkt $M = (x_M, y_M)$ die Menge aller Punkte, die von diesem Mittelpunkt einen festen Abstand $r > 0$, den sogenannten Radius, haben. Ein Punkt P mit den Koordinaten (x, y) liegt also auf diesem Kreis, falls folgendes gilt:

$$\text{Abstand zwischen } P \text{ und } M = r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2}.$$

Diese Gleichung lässt sich auch umschreiben. Eine Fallunterscheidung ist hier beim Wurzelziehen nicht nötig, da man verlangt, dass $r > 0$ ist.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \\ \Leftrightarrow r^2 &= (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= \left(\frac{x - x_M}{r}\right)^2 + \left(\frac{y - y_M}{r}\right)^2 \end{aligned}$$

Beispiel:

- Wir wollen entscheiden, ob die beiden Punkte $A = (2, 7)$ und $B = (-1, 3)$ auf dem Kreis mit Mittelpunkt $M = (1, -1)$ und Radius $r = \sqrt{20}$ liegen. Dazu bestimmen wir die Abstände, die beide Punkte vom Mittelpunkt haben.

$$\begin{aligned} \text{Abstand zwischen } A \text{ und } M &= \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 1)^2 + (7 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{65} \neq \sqrt{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Abstand zwischen } B \text{ und } M &= \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Der Punkt A liegt also, im Gegensatz zu B , nicht auf dem Kreis.

2. In der obigen „Normalform“ ist der Gleichung direkt anzusehen, dass sie einen Kreis beschreibt. Das ändert sich allerdings sofort, wenn wir die Quadrate ausrechnen.

Die Gleichung $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt $(1, 2)$ und dem Radius $r = \sqrt{1} = 1$. Rechnet man die beiden Quadrate mittels binomischer Formel aus, erhält man:

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y - 2)^2 &= 1 \\ \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 1 \\ \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 &= 0\end{aligned}$$

Dieser letzten Gleichung kann man nicht mehr direkt ansehen, dass sie einen Kreis beschreibt!?

3. Gegeben ist die Gleichung $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 32 = 0$, die einen Kreis beschreibt.

!! Achtung !!

Nicht jede Gleichung dieser Gestalt beschreibt einen Kreis!!

!! Achtung !!

Wir wollen den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises bestimmen. Dazu ergänzen wir quadratisch in x und y .

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 10x + 6y + 32 &= 0 \\ \Longleftrightarrow x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 + 6y + 9 - 9 + 32 &= 0 \\ \Longleftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 3)^2 - 34 + 32 &= 0 \\ \Longleftrightarrow (x - 5)^2 + (y + 3)^2 &= 2 \\ \Longleftrightarrow \left(\frac{x - 5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y + 3}{\sqrt{2}}\right)^2 &= 1\end{aligned}$$

Der Kreis hat also den Mittelpunkt $(5, -3)$ und den Radius $\sqrt{2}$.

5 Trigonometrische Funktionen

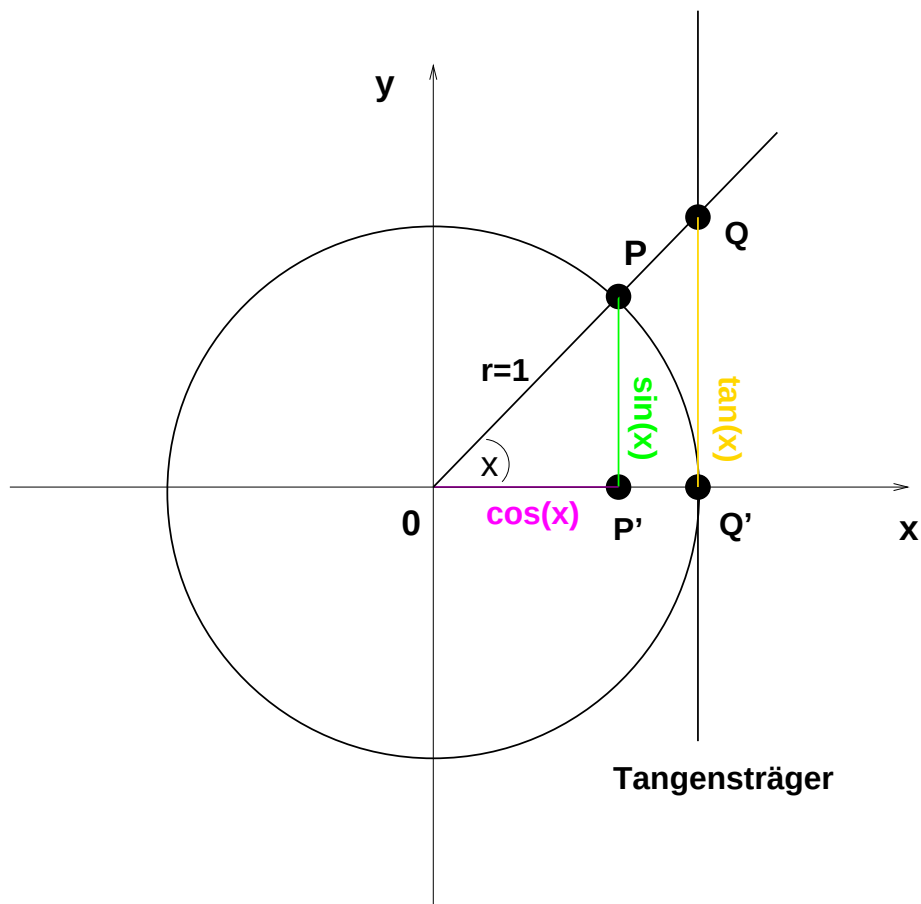
Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ lassen sich am rechtwinkligen Dreieck definieren. Dazu sei x ein nichtrechter Winkel dieses Dreiecks im Bogenmass. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos(x) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\end{aligned}$$

Der Tangens und der Kotangens sind durch die Winkelfunktionen $\sin$ und $\cos$ definiert.

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\end{aligned}$$

Alle Winkelfunktionen können am Einheitskreis direkt abgelesen werden. Die folgende Skizze zeigt das für den Sinus, den Kosinus und den Tangens.



Wir wollen uns noch kurz überlegen, dass die Strecke $\overline{QQ'}$ tatsächlich der $\tan(x)$ ist, d.h. wir müssen beweisen, dass $\tan(x) = \overline{QQ'}$ ist. Dazu müssen wir uns drei Dinge überlegen und beide Aussagen zusammenfassen:

- Nach Definition gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}}$
- Der Punkt Q' liegt auf dem Einheitskreis, die Strecke $\overline{OQ'}$ hat also die Länge 1.

Alles klar?

Satz 3 (Sehr einfache Eigenschaften der Winkelfunktionen)

$\sin(x)$	$\in$	$[-1, 1]$	
$\cos(x)$	$\in$	$[-1, 1]$	
$\sin(x + 2\pi)$	$=$	$\sin(x)$	
$\cos(x + 2\pi)$	$=$	$\cos(x)$	
$\sin^2(x) + \cos^2(x)$	$=$	1	<i>Satz des Pythagoras</i>
$\sin(-x)$	$=$	$-\sin(x)$	<i>sin ist ungerade</i>
$\cos(-x)$	$=$	$\cos(x)$	<i>cos ist gerade</i>

Satz 4 (Eigenschaften der Winkelfunktionen)

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$=$	$\cos(x)$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$=$	$-\sin(x)$
$\sin(\pi - x)$	$=$	$\sin(x)$
$\cos(\pi - x)$	$=$	$-\cos(x)$

6 Kurven in Parameterdarstellung

Es gibt drei Arten um eine Kurve K in der $x - y$ -Ebene zu beschreiben:

1. Explizit als Graph einer Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich D :

$$K = \text{Graph}(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$$

2. Implizit als Lösungsmenge einer Gleichung $\phi(x, y) = 0$:

$$K = \{ (x, y) \mid \phi(x, y) = 0 \}$$

3. Die allgemeinste und für die meisten Zwecke günstigste Beschreibung einer ebenen Kurve erfolgt mit zwei (differenzierbaren) Funktionen $x(t), y(t)$ ($a \leq t \leq b$).

Definition 6.1 In unserem festen Koordinatensystem durchläuft der sich mit t stetig ändernde Punkt

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

eine ebene Kurve. Man bezeichnet diese Darstellung als Parameterdarstellung dieser Kurve, t den Parameter und $[a, b]$ das Parameterintervall.

Beispiel 6.1 Der Graph K der Funktion $y = f(x) = x^2$ kann wie folgt beschrieben werden:

1.

$$K = \text{Graph}(f) = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

2.

$$K = \{ (x, y) \mid \phi(x, y) = y - x^2 = 0 \}$$

3.

$$K = \left\{ P(t) = \begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Graph der Funktion $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) besitzt die Parameterdarstellung

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Von einer Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ kann man im allgemeinen nicht zu einer (allgemein gültigen) expliziten Darstellung $y = f(x)$ oder $x = h(y)$ übergehen. Das geht nur dann, wenn sich eine der beiden Gleichungen nach t auflösen lässt:

$$\begin{aligned} x = x(t) &\stackrel{?}{\rightarrow} t = t(x) && \text{dann folgt} && y = y(t(x)) =: f(x) \\ y = y(t) &\stackrel{?}{\rightarrow} t = t(y) && \text{dann folgt} && x = x(t(y)) =: h(y) \end{aligned}$$

Beispiel 6.2 Die Gerade durch die Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) besitzt die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.3 Der Kreis mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius r besitzt die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + r \cos(t) \\ y_0 + r \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

7 Aufgaben

1. Der Schatten eines 1.20 m hohen vertikalen Stabes ist 1.40 m lang. Wie hoch ist ein Baum, dessen Schatten zur selben Zeit 11.20 m lang ist?
2. Rechnen Sie die angegebenen Winkel jeweils in Grad bzw. Bogenmass um: $\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, 10 , 43° und -411° .
3. Bestimmen Sie die Mittelpunkte und Radien der folgenden Kreise und bestimmen Sie dann die Parameterdarstellung der beiden Kreise.

$$a) \quad x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{3}{2} = 0$$

$$b) \quad x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$$

Hinweis: Beachten Sie, dass folgendes gilt

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2x_Mx - 2y_My + x_M^2 + y_M^2 - r^2$$

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$(a) \quad \sin(z) = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

5. Berechnen Sie den Schnittpunkt (bzw. die Schnittpunkte) der Geraden $y = x + 1$ mit dem Kreis $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.
6. Ein Technischer Zeichner möchte 3 Punkte mit den Koordinaten $(0, 3)$, $(0, -2)$ und $(2, 0)$ durch einen Kreisbogen miteinander verbinden. Wie lautet die Gleichung des Kreises?

8 Lösungen der Aufgaben

1. 9.60m

2. $\frac{2}{3}\pi = 120^\circ$, $-\frac{3}{2}\pi = -270^\circ$, $10 = 572.95^\circ$, $43^\circ = 0.75$ und $-411^\circ = -7.17$

3. a) Mittelpunkt $(1/2, -3/2)$, Radius 2

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

b) Mittelpunkt $(-2, 2)$, Radius $\sqrt{8}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sqrt{8} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$4. \mathbb{L}_a = \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathbb{L}_b = \left\{ k \cdot \frac{2\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

5. $(1, 2)$ und $(-1, 0)$

$$6. (x + 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 = 2.55^2$$