



Veranstaltung/Course:	<b>23346-01 Statistik</b>
Semester/Semester:	
Prüfer/Examiner:	<b>Dr. Thomas Zehrt</b>
Datum+Zeit/Date+Time:	
Dauer/Duration:	<b>90 min</b>

---

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- einfacher Taschenrechner  
(nur TI-30 Modelle siehe Liste auf der Fakultätshomepage)
- Wörterbuch für Fremdsprachige
- Formelsammlung (wird gestellt)

**Permitted aids:**

- simple calculator  
(only TI-30 model in accordance with list on the faculty webpage)
- foreign-language dictionary
- formulary (provided)

---

**Hinweis:**

Falls eine Studentin oder ein Student eine Leistungsüberprüfung mit unlauteren Mitteln beeinflusst oder zu beeinflussen versucht, gilt die betreffende Leistungsüberprüfung als nicht bestanden und wird mit der Note 1.0 bewertet (gemäß BA-Ordnung §23, MA-Ordnung §23).

**Note:**

If a student is found to use or to attempt to use dishonest means to influence his or her performance in the exam, the work will be disqualified and graded 1.0 (in accordance with BA-Regulation §23, MA-Regulation §23).

---

<b>Name/Last name</b>	
<b>Vorname/First name</b>	
<b>Matr.-Nr.</b>	

## Statistik

---

### **Bemerkungen:**

1. Die Prüfung umfasst 12 Aufgaben (1 bis 12). Beantworten Sie ALLE Fragen.
2. Skizzen und Diagramme müssen NICHT massstabsgetreu sein.
3. Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den eingerahmten Punktzahlen.
4. Die definitive Lösung darf von jeder Aufgabe nur eine Version enthalten und hat direkt im Anschluss an diese Aufgabe (bzw. auf der Rückseite des Aufgabenblattes) zu erfolgen.
5. Die ausgeteilten Formelsammlungen dürfen nicht beschriftet werden und sind ebenfalls mit der Prüfung abzugeben.
6. Nutzen Sie für provisorische Berechnungen das Umlageblatt.
7. Beantworten Sie die Fragen auf Deutsch oder Englisch.

### **Remarks:**

- The exam consists of 12 questions (1 to 12). Answer ALL the questions.
  - Sketches and diagrams are NOT necessarily drawn to scale.
  - The subquestions are graded according to the framed number of points.
  - The final solution must only contain one version to each question and has to stand directly after this question (or on the back of the corresponding question sheet).
  - The distributed formulary is not allowed to be labeled and has to be submitted with the exam.
  - Use the cover sheet for provisional calculations.
  - Answer the questions in German or English.
-

## Aufgabe/Question 1

Bei einem Abfüllprozess wird eine Stichprobe vom Umfang  $n = 15$  genommen. Folgende Abfüllmengen (in Gramm) werden dabei notiert (Urliste):

During a bottling process, a random sample of  $n = 15$  units is taken. The following bottling quantities (in grams) are noted (master list):

400, 399, 398, 400, 398, 399, 397, 400, 402, 399, 401, 399, 400, 402, 398.

- (a) Bestimmen Sie die empirische Verteilungsfunktion  $F$  dieser Daten.  
(b) Bestimmen Sie (falls möglich) die Werte  $F(-17)$ ,  $F(400)$  und  $F(500)$ .

- (a) Determine the empirical distribution function  $F$  of these data. 4  
(b) Determine (if possible) the values  $F(-17)$ ,  $F(400)$  and  $F(500)$ . 2

Lösung/Solution:

## Aufgabe/Question 2

1. Eine Aktie zeigt an 5 aufeinanderfolgenden Tagen die folgende Wertentwicklung: A share price performs as follows on five consecutive days:

Tag	1	2	3	4	5
Kurs	60.00	63.50	61.50	65.00	62

- (a) Welchen durchschnittlichen Wachstumsfaktor hat der Prozess? (a) What is the average growth factor of the process? 2
- (b) Welchen Wert wird diese Aktie, basierend auf diesem durchschnittlichen Wachstumsfaktor, am 10. Tag haben? (b) What will the value of this stock be on day 10, based on this average growth factor? 2
- 

2. Beweisen oder widerlegen Sie den folgenden Zusammenhang (zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel). Prove or disprove the following relationship (between arithmetic and geometric mean).
- Für alle reellen Zahlen  $a, b > 0$  gilt For all real numbers  $a, b > 0$ : 2

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Lösung/Solution:

### Aufgabe/Question 3

Es wurden  $n = 20$  Studierende nach ihren Noten in Mathematik (Merkmal  $X$ ) und in Statistik (Merkmal  $Y$ ) befragt:

A sample of  $n = 20$  students was asked about their grades in mathematics (characteristic  $X$ ) and in statistics (characteristic  $Y$ ):

(6, 6), (4, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 4), (1, 1), (4, 5),  
 (3, 4), (1, 2), (3, 1), (4, 5), (5, 4), (3, 4), (5, 5), (4, 4), (4, 4), (4, 5).

- (a) Erstellen Sie die zweidimensionale Häufigkeitstabelle (Kontingenztafel).  
 (b) Berechnen Sie  $\bar{x}$  und  $var(X)$ .

- (a) Create the two-dimensional frequency table (contingency table).  
 (b) Determine  $\bar{x}$  und  $var(X)$ .

2
4

Lösung/Solution:

		Y						X
		1	2	3	4	5	6	
X	1							
	2							
	3							
	4							
	5							
	6							
Y								

## Aufgabe/Question 4

1. Sei/let

$x_i$	1	2	3
$y_i$	1	5	10

Bestimmen Sie für die Wertepaare die  
Regressionsfunktion der Gestalt  
 $y = f(x) = Ce^{Dx}$ .

Determine for the pairs of values the  
regression function of the form  
 $y = f(x) = Ce^{Dx}$ .

4

2. Erläutern Sie kurz, wie man ein Regressions-  
problem mit einer Ansatzfunktion des Typs  
 $y = f(x) = a \cdot x^b$  in ein lineares Regressions-  
problem umwandeln kann.

Explain briefly how a regression problem  
with an approach function of the type  
 $y = f(x) = a \cdot x^b$  can be converted into a  
linear regression problem.

2

Lösung/Solution:

## Aufgabe/Question 5

Erläutern Sie die Bedeutung des Summanden  $G$  im additiven Zeitreihenmodell

$$y_i = y(t_i) = G(t_i) + S(t_i) + R(t_i).$$

Wie kann  $G$  bestimmt werden? Wie ist die trendbereinigte Zeitreihe  $y_i^*$  definiert?

Lösung/Solution:

Explain the meaning of the additive  $G$  in the additive time series model

$$y_i = y(t_i) = G(t_i) + S(t_i) + R(t_i).$$

How can  $G$  be determined? How is the trend-adjusted time series  $y_i^*$  defined?

## Aufgabe/Question 6

Aus den Zahlen 1 bis 30 werden beim Zahlenlotto „5 aus 30“ fünf verschiedene Zahlen ausgewählt. Wieviele

1. **Möglichkeiten** gibt es
  - (a) genau fünf Richtige zu tippen oder
  - (b) mindestens zwei Richtige zu tippen?

Five different numbers are selected from the numbers 1 to 30 in the „5 aus 30“ number lottery. How many

- possibilities** are there
- (a) to pick exactly five correct outcomes or
  - (b) to pick at least two correct numbers?

1
---

2
---

---

Die acht Ecken eines Würfels sind gleichmässig abgeschliffen, so dass der Würfel auch auf jeder Ecke liegen bleiben kann.

2. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit jeder Ecke nur  $1/4$  so gross wie jede Seite. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Sechs zu würfeln?

The eight corners of a dice are ground evenly, so that the dice can also come to rest on any corner. However, the probability of any corner is only  $1/4$  as great as that of any side. What is the probability of rolling a six?

3
---

Lösung/Solution:



## Aufgabe/Question 7

Aus zwei Urnen  $U_1$  und  $U_2$  wird zufällig eine Urne ausgewählt, wobei jede Urne dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, in die Auswahl zu gelangen. Die zwei Urnen enthalten weiße und schwarze Kugeln, wobei sich in Urne  $U_1$  : zwei weiße und fünf schwarze  $U_2$  : vier weiße und vier schwarze Kugeln befinden. Aus der zufällig gewählten Urne wird nun eine Kugel gezogen.

- (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel weiss ist?  
(b) Die gezogene Kugel ist schwarz. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus Urne  $U_2$  stammt?

Lösung/Solution:

One urn is randomly selected from two urns,  $U_1$  and  $U_2$ , where each urn has an equal probability of being selected. The two urns contain white and black balls, where

$U_1$  : two white and five black  
 $U_2$  : four white and four black  
balls are located. A ball is now drawn from the randomly chosen urn.

- (a) What is the probability that the ball drawn is white?  
(b) The ball drawn is black. What is the probability that it comes from urn  $U_2$ ?

3

3

## Aufgabe/Question 8

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $E(X) = 3$  und  $Var(X) = 2$ . Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(-1 < X < 7)$  (nach unten) ab.

1. Können Sie auch (irgend) eine obere Schranke für diese Wahrscheinlichkeit angeben? Begründen Sie Ihre Aussage.

Let  $X$  be a random variable with  $E(X) = 3$  and  $Var(X) = 2$ . Estimate the probability  $P(-1 < X < 7)$  (downwards).

Can you also give an upper bound for this probability? Justify your statement.

4

In einer Urne seien 6 Kugeln, durchnummeriert von 1 bis 6. Es werden zwei Kugeln **mit**

2. Zurücklegen gezogen.  $X$  sei die Nummer der ersten Kugel und  $Y$  die der zweiten Kugel. Sind  $X$  und  $Y$  abhängig oder unabhängig? Begründen Sie Ihre Aussage.

In an urn there are 6 balls, numbered from 1 to 6. Two balls are drawn **with** replacement.  $X$  is the number of the first ball and  $Y$  that of the second ball.

Are  $X$  and  $Y$  dependent or independent? Justify your statement.

2

Lösung/Solution:

## Aufgabe/Question 9

In einer Telefonzentrale gehen im Durchschnitt 120 Anrufe pro Stunde ein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer **Minute**

1. (a) kein Anruf eingeht,  
(b) genau ein Anruf eingeht oder  
(c) mehr als drei Anrufe eingehten?

A telephone exchange receives an average of 120 calls per hour. What is the probability that, within one minute,

- (a) no call comes in,  
(b) exactly one call comes in or  
(c) more than three calls come in?

1
---

1
---

2
---

---

Gegeben seien die  $x$ -Werte  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$  und  $x_4 = 1$ . Bestimmen

2. Sie **zwei** Reihen von  $y$ -Werten  $y_1, \dots, y_4$ , so dass der Korrelationskoeffizient der Wertepaare  $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$  gleich  $-1$  ist.

Given the  $x$  values  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$  and  $x_4 = 1$ . Determine

**two** series of  $y$  values  $y_1, \dots, y_4$  such that the correlation coefficient of the pairs  $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$  is equal to  $-1$ .

3
---

Lösung/Solution:

## Aufgabe/Question 10

Sei/Let

$$\phi(x; \mu, \sigma) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

(a) Skizzieren Sie  $\phi(x; -1, 1)$ .

(a) Sketch  $\phi(x; -1, 1)$ .

2

(b) Berechnen Sie  $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \phi(x; \mu, \sigma) dx$ .

(b) Calculate  $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \phi(x; \mu, \sigma) dx$ .

4

Lösung/Solution:

## Aufgabe/Question 11

Es gelte  $X \sim B(10; p)$ . Bestimmen Sie einen ML-Schätzer  $p_{ML}$  für  $p$  bezüglich der konkreten Stichprobe  $(0, 3, 2)$ . Die Herleitung **muss** angegeben werden.

Lösung/Solution:

Let  $X \sim B(10; p)$ . Determine a ML-estimator  $p_{ML}$  for  $p$  with respect to the given sample  $(0, 3, 2)$ . The derivation **must** be indicated.

## Aufgabe/Question 12

- In einer Prüfung werden 15 Fragen gestellt, die nur mit „Ja“ oder „Nein“ zu beantworten sind. Der Dozent legt fest, dass ein Student, der 13 oder mehr Fragen richtig beantwortet, die Prüfung bestanden hat. Die Nullhypothese  $H_0$  sei: der Student hat (ausschliesslich) geraten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  eines Fehlers 1. Art.
- 1.

In an exam, 15 questions are asked that can only be answered with „Yes“ or „No“. The lecturer determines that a student who answers 13 or more questions correctly has passed the exam. The null hypothesis  $H_0$  is: the student has (exclusively) guessed. Determine the probability  $\alpha$  of a type 1 error.

4

- Welche zwei Fehler können bei einem Hypothesentest auftreten, und wie sind sie zu interpretieren?
- 2.

What are the two errors that can occur in a hypothesis test, and how should they be interpreted?

2

Lösung/Solution: