

Statistik

Dr. Thomas Zehrt

Wahrscheinlichkeitsräume

Motivation

Das Hauptanliegen der Stochastik liegt darin, Modelle zur (mathematischen) Beschreibung von so genannten Zufallsexperimenten (z.B. das Würfeln) zu entwickeln. Dabei geht man in zwei Schritten vor:

1. Man konstruiert eine Menge, deren Elemente gerade allen möglichen Ausgängen des Zufallsexperimentes entsprechen. Diese Menge wird hier stets mit Ω bezeichnet und für das Beispiel des Würfels liegt es wohl nahe, $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ zu setzen.
2. Im nächsten Schritt konstruiert man eine Funktion P , die jedem Element der Menge Ω (oder genauer sogar jeder Teilmenge von Ω) eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 (oder 0% und 100%) zuordnet. Natürlich sollte diese Zahl der „Wahrscheinlichkeit“, entsprechen, mit der wir beim Zufallsexperiment den zugehörigen Ausgang erwarten. Beim Würfeln sollte also z.B. $P(1) = 1/6$ gelten. Wir werden auch klären, welche Eigenschaften eine solche Funktion P sinnvollerweise haben muss.

Benötigtes Schulwissen

Mengen und Mengenalgebra Zunächst wollen wir einige grundlegende Begriffe einführen und erläutern. Nach G. Cantor (1845-1918) versteht man unter einer Menge M die Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einer Gesamtheit. Dabei kommt es **nicht** auf die Reihenfolge dieser Objekte an. Ist m ein Element einer Menge M so schreiben wir $m \in M$, sonst $m \notin M$. Ist E eine Eigenschaft und m ein Element der Menge M , dann bedeutet die Bezeichnung $E(m)$, dass auf m die Eigenschaft E zutrifft. Die Menge der Elemente $m \in M$, die die Eigenschaft $E(m)$ haben, wird dann mit $\{m \in M \mid E(m)\}$ bezeichnet.

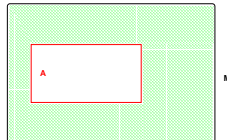
Eine spezielle Menge ist die Menge, die kein Element enthält. Diese Menge wird die leere Menge genannt und mit \emptyset oder $\{ \}$ bezeichnet.

Mengenalgebra Ist M eine Menge, so heisst eine Menge A Teilmenge von M , wenn aus $a \in A$ stets $a \in M$ folgt. Wir bezeichnen das durch $A \subseteq M$.

1. **Komplement** Ist A eine Teilmenge der Menge M , so bezeichnet

$$A^c = \overline{A} = \{ m \in M : m \notin A \}$$

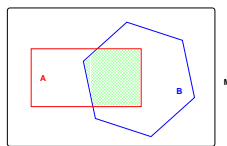
das Komplement von A in M .



2. **Durchschnitt** Sind A und B Teilmengen einer Menge M , so bezeichnet

$$A \cap B = \{ m \in M \mid m \in A \underbrace{\wedge}_{\text{und}} m \in B \}$$

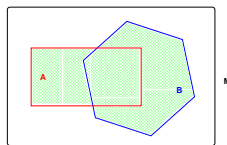
den Durchschnitt von A und B .



3. **Vereinigung** Sind A und B Teilmengen einer Menge M , so bezeichnet

$$A \cup B = \{ m \in M \mid m \in A \underbrace{\vee}_{\text{oder}} m \in B \}$$

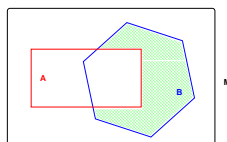
die Vereinigung von A und B .



4. **Differenz** Sind A und B Teilmengen einer Menge M , so bezeichnet

$$B - A = \{ m \in M \mid m \in B \underbrace{\wedge}_{\text{und}} m \notin A \}$$

die Differenz.



Beachten Sie, dass $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ und $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1 Grundbegriffe

Wir ordnen einem Zufallsexperiment mit endlich oder abzählbar unendlich vielen möglichen Ausgängen eine nichtleere Menge Ω zu, deren Elemente ω die Versuchsausgänge bezeichnen.

Definition 1.1 Ω heisst der Ergebnisraum oder Stichprobenraum, $\omega \in \Omega$ heisst Ergebnis oder Elementarereignis, $A \subset \Omega$ heisst Ereignis (d.h. ein $\omega \in A$ ist der beobachtete Versuchsausgang). $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Ereignisse.

Beispiele:

1. Werfen einer Münze:

$$\Omega = \{\text{Kopf, Zahl}\} = \{K, Z\}.$$

2. Werfen eines Würfels:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ereignisse könnten z.B. $A = \{2, 4, 6\}$ (man würfelt eine gerade Zahl) oder $B = \{5, 6\}$ (man würfelt eine Zahl, die grösser als 4 ist) sein.

3. n -maliges Werfen eines Würfels:

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \text{ für } i = 1, \dots, n \}.$$

4. Wert einer Aktie (heute um 19:00 Uhr): $\Omega = [0, \infty)$. Das Ereignis „die Aktie ist wertlos oder kostet zwischen 20.- und 50.- SFr.“ ist $A = \{0\} \cup [20, 50]$

Die obige Konvention gestattet es, mengentheoretische Darstellungen zu nutzen. Seien $A, B \subset \Omega$ (oder $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$) Ereignisse.

Darstellung	Ereignis	Erklärung
$A \cap B$	A und B	Alle Elemente aus Ω , die zu A und B gehören.
$A \cup B$	A oder B	Alle Elemente aus Ω , die zu A oder B gehören.
$A - B$	A ohne B	Alle Elemente aus Ω , die zu A aber nicht zu B gehören.
A^c	nicht A	Alle Elemente aus Ω , die nicht zu A gehören.

$\Omega \subset \Omega$ heisst das sichere Ereignis und $\emptyset \subset \Omega$ das unmögliche Ereignis. Zwei Ereignisse A und B heissen unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$ ist.

Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Zufall Wer sich mit Zufallsexperimenten beschäftigt, stellt sehr bald fest, dass der Ausgang eines einzelnen Zufallsexperimentes völlig offen ist. Führt man jedoch ein Experiment mit dem Ergebnisraum Ω unter den selben Bedingungen sehr oft aus (n -mal), und zählt dabei, wie oft ein bestimmtes Ereignis A eintritt (k -mal), so beobachtet man (höchstwahrscheinlich), dass die relative Häufigkeit $f(A)$ von A mit wachsendem n gegen einen festen Wert $p \in [0, 1]$ strebt:

$$f(A) = \frac{k}{n} \longrightarrow p \in [0, 1].$$

Dabei ist der Grenzwert **nicht** im mathematischen Sinne zu verstehen, sondern rein empirisch zu deuten. Wirft man eine Münze n -mal und zählt die k Versuchsausgänge „Kopf“, so ist intuitiv klar, dass

$$\frac{k}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Auch hier ist kein mathematischer Grenzwert gemeint, denn es kann immer wieder beliebig lange Sequenzen geben, in denen z.B. nur „Zahl“ fällt.

Definition 1.2 (Axiome von A. N. Kolmogorow (1903-1987, russ. Math.)) Ein Paar (Ω, P) ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, wenn Ω eine nicht-leere endliche oder abzählbar unendliche Menge ist und P eine Abbildung, die jeder Teilmenge $A \subset \Omega$ einen Wert $P(A)$ so zuordnet, dass

1. $P(\Omega) = 1$ (P ist normiert);
2. für alle $A \subset \Omega$ gilt $P(A) \geq 0$ und
3. sind A_1, A_2, \dots disjunkte Mengen (Ereignisse), so ist

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (P \text{ ist } \underline{\text{additiv}}).$$

Jede Abbildung P mit diesen drei Eigenschaften heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung oder einfach Verteilung.

Aus der Eigenschaft drei folgt, dass man aus der Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ω die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses ableiten kann, denn natürlich ist A disjunkte Vereinigung seiner Elemente.

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Die Wahl von Ω zu einem Zufallsexperiment ist meistens klar, aber die richtige Wahl von P ist nur in den wenigsten Fällen offensichtlich und wird uns noch viel beschäftigen. Die obigen drei Bedingungen definieren nur einen Rahmen für P , aber aus ihnen lassen sich einige weitere Eigenschaften einer Verteilung ableiten.

Satz 1 (Eigenschaften von P) Für alle $A, B, A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ A \subset B &\Rightarrow P(A) \leq P(B) \\ P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \\ P(\cup_{i=1}^n A_i) &\leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Beweis:

1. Für jede Teilmenge $A \subset \Omega$ gilt $A \cup A^c = \Omega$ und $A \cap A^c = \emptyset$. Mit den Eigenschaften 1 und 3 aus der Definition folgt somit

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ &= P(A) + P(A^c) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

2. Da $A \subset B$ gilt, ist $B = A \cup (B - A)$ und diese Vereinigung ist disjunkt. Damit folgt mit Eigenschaften 3 und 2 aus der Definition:

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + \underbrace{P(B - A)}_{\geq 0} \geq P(A).$$

3. Die Menge A kann auf die folgende Weise als disjunkte Vereinigung geschrieben werden:
 $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = (A - B) \cup (A \cap B)$. Mit der Eigenschaft 3 aus der Definition folgt somit

$$P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

und somit die Behauptung.

4. Diese Regel folgt durch Induktion aus der Eigenschaft 3 aus der Definition.
5. Wir nutzen die folgenden Darstellungen der Mengen A, B und $A \cup B$ als disjunkte Vereinigung:

$$\begin{aligned} A &= (A - B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B - A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B). \end{aligned}$$

Mit der Eigenschaft 3 folgt nun einerseits

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A - B) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B - A) + P(A \cap B) \quad \text{also} \\ P(A) + P(B) &= P(A - B) + P(B - A) + 2P(A \cap B); \end{aligned}$$

und andererseits

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

und damit folgt die Behauptung.

oder wir nutzen die Darstellung von $A \cup B$ als disjunkte Vereinigung $A \cup B = (A - B) \cup B$. Damit folgt

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A - B)}_{=P(A) - P(A \cap B)} + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$$

wobei wir die schon bewiesene Eigenschaft 1 benutzt haben. □

Aufgabe 1.1 Für die zufälligen Ereignisse A, B seien die Wahrscheinlichkeiten $P(A^c) = 0.3$, $P(B) = 0.45$, $P(A \cup B) = 0.9$ bekannt. Man ermittle hieraus $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(A - B)$, $P(B - A)$ und $P(A^c \cap B^c)$.

Lösung: Beachten Sie, dass $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ und $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

$P(A \cap B) = 0.25$, $P(A) = 0.7$, $P(A - B) = 0.45$, $P(B - A) = 0.2$ und $P(A^c \cap B^c) = 0.1$

Aufgabe 1.2 In einem Restaurant essen mittags gewöhnlich 20% der Gäste Vorspeise (kurz: V) und Nachtisch (kurz: N), 65% nehmen keine Vorspeise und 30% von ihnen wählen einen Nachtisch. Man bestimme den Prozentsatz der Gäste, die

- Vorspeise und keinen Nachtisch,
- keine Vorspeise und einen Nachtisch,
- weder Vorspeise noch einen Nachtisch

wählen.

Lösung:

- $P(V \cap N^c) = P(V - N) = P(V) - P(V \cap N) = 0.15$
- $P(V^c \cap N) = P(N - V) = P(N) - P(N \cap V) = 0.10$
- $P(V^c \cap N^c) = P((V \cup N)^c) = 1 - P(V \cup N) = 1 - (P(V) + P(N) - P(V \cap N))$

oder

	V	V^c	
N	0.20		0.30
N^c			
		0.65	

2 Bestimmung der Werte $P(\omega)$

Kennen wir die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse, so können wir auch allen Ereignissen ihre Wahrscheinlichkeit zuordnen und Es gibt im wesentlichen drei Möglichkeiten zur Beantwortung dieser Frage.

1. Kombinatorische Bestimmung durch Abzählen von Ω

Dieses Verfahren kann dann angewandt werden, wenn man davon ausgeht, dass alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$ **gleichwahrscheinlich** sind. In diesem Fall heisst P Gleichverteilung auf Ω und das Paar (Ω, P) heisst Laplacescher Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt für alle Ergebnisse $\omega \in \Omega$

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

und für alle Ereignisse $A \subset \Omega$ folgt

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{\omega \in A} P(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} \\ &= \frac{\text{Anzahl günstiger Ergebnisse}}{\text{Anzahl möglicher Ergebnisse}} \end{aligned}$$

Ein Zufallsexperiment in dem jedes Ergebnis mit der selben Wahrscheinlichkeit eintritt, heisst ein Laplace-Experiment.

Hauptproblem: Wie bestimmt man die Mächtigkeit von Mengen bzw. wie kann man Mengen abzählen?

2. **Statistische Schätzung** z.B. kann man durch statistische Schätzungen die Wahrscheinlichkeit der Geburt eines Jungen (etwa 0,51) feststellen.
3. **Logische Überlegung und Kombination statistischer Methoden mit mathematischen Ableitungen**

3 Abzählen von Mengen

Definition 3.1 Eine endliche Menge M ist eine Menge, die nur endlich viele Elemente enthält. Die Anzahl der Elemente wird mit $|M|$ bezeichnet und heisst auch die Kardinalität oder Mächtigkeit von M .

3.1 Das Einschluss-/Ausschlussprinzip

Satz 2 Für zwei beliebige Mengen M_1 und M_2 gilt

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|.$$

Aufgabe 3.1 Wieviele Zahlen zwischen 1 und 100 gibt es, die durch 2 oder 7 teilbar sind (beide Grenzen inklusive)?

Lösung: Seien M_1 bzw. M_2 die Mengen aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und 100, die durch 2 bzw. 7 teilbar sind, d.h.

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100, 2 \text{ teilt } x\} \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100, 7 \text{ teilt } x\}. \end{aligned}$$

Sicher gilt $|M_1| = \lfloor 100/2 \rfloor = 50$ (jede zweite Zahl ist durch 2 teilbar) und $|M_2| = \lfloor 100/7 \rfloor = 14$ (jede siebente Zahl ist durch 7 teilbar). Das Symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ steht dabei für Abrunden. Diese beiden Mengen sind also recht leicht abzuzählen. Die gesuchte Menge $M_1 \cup M_2$ aber nicht! Dagegen ist $M_1 \cap M_2$ wieder leicht abzuzählen, denn das ist die Menge aller Zahlen die sich durch 2 **und** 7 (also durch 14) teilen lassen. Also gilt $|M_1 \cap M_2| = \lfloor 100/14 \rfloor = 7$. Somit:

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| = 50 + 14 - 7 = 57.$$

3.2 Permutationen (ohne Wiederholung)

Sei \mathbb{A} eine Menge mit N Elementen, d.h. wir können alle Elemente durchnummerieren und $\mathbb{A} = \{1, 2, \dots, N\}$ setzen. Wieviele verschiedene Arten gibt es, die Elemente von \mathbb{A} anzuordnen (**zu permutieren**)?

Beispiel:

Für die Menge $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ gibt sechs Möglichkeiten $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ und $(3, 2, 1)$.

Satz 3 Die Elemente einer Menge mit N Elementen lassen sich auf $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$ verschiedene Arten permutieren.

Beweis:

Induktionsanfang: Für $N = 1$ ist der Satz natürlich richtig.

Induktionsschritt: Die Behauptung sei für alle N -elementigen Mengen richtig und $\{A_1, \dots, A_N, A_{N+1}\}$ sei eine $(N+1)$ -elementige Menge. Die möglichen Anordnungen zerfallen nun in $(N+1)$ Klassen K_k für $k = 1, \dots, N+1$:

Die Anordnungen der Klasse K_k haben das Element A_k an erster Stelle, bei beliebiger Anordnung der übrigen N Elemente.

Beispiel $N = 4$ und $\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4\}$

K_1	K_2	K_3	K_4
1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Nach der Induktionsvoraussetzung besteht nun jede Klasse aus $N!$ Permutationen.

Da es $(N+1)$ Klassen gibt, ist die Gesamtzahl aller möglichen Anordnungen von $\{A_1, \dots, A_N, A_{N+1}\}$ gleich $(N+1) \cdot N! = (N+1)!$. \square

3.3 Kombinationen

Sei $\mathbb{A} = \{1, 2, \dots, N\}$ eine Menge mit N Elementen und $n \leq N$ eine natürliche Zahl. Wieviel verschiedene Teilmengen von \mathbb{A} mit genau n Elementen gibt es?

Beispiel:

Ist $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ und $n = 2$, so gibt es offensichtlich genau drei verschiedene Teilmengen mit 2 Elementen: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$.

Satz 4 Es gibt genau

$$\binom{N}{n} := \frac{N!}{(N-n)! n!}$$

verschiedene n -elementige Teilmengen von \mathbb{A} (ohne dabei die Reihenfolge zu berücksichtigen).

Beispiel 3.1

$$\begin{aligned} \binom{5}{2} &= \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = 10 \\ \binom{100}{2} &= \frac{100!}{98! \cdot 2!} = \frac{98! \cdot 99 \cdot 100}{98! \cdot 2} = 99 \cdot 50 = \end{aligned}$$

Beweis:

Es sei C_n^N die Anzahl der n -elementigen Teilmengen von $\{A_1, \dots, A_N\}$. Wir beweisen $C_n^N = \binom{N}{n}$ durch Induktion nach N .

Induktionsanfang: $N = 1$:

Es ist $C_0^1 = C_1^1 = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, da die einelementige Menge $\{A_1\}$ nur eine nullelementige Teilmenge \emptyset und eine einelementige Teilmenge $\{A_1\}$ hat.

Induktionsschritt:

Es sei $C_n^N = \binom{N}{n}$ schon bewiesen. Da

$$C_0^{N+1} = 1 = \binom{N+1}{0}$$

$$C_{N+1}^{N+1} = 1 = \binom{N+1}{N+1}$$

brauchen wir nur noch den Fall $1 \leq n \leq N$ zu behandeln. Die n -elementigen Teilmengen von $\{A_1, \dots, A_{N+1}\}$ zerfallen in zwei Klassen K_0 und K_1 :

- K_0 umfasse alle Teilmengen, die das Element A_{N+1} nicht enthalten
- K_1 umfasse alle Teilmengen, die A_{N+1} enthalten.

$|K_0|$ ist gleich der Anzahl der n -elementigen Teilmengen von $\{A_1, \dots, A_N\}$, also nach Induktionsvoraussetzung gleich $\binom{N}{n}$. Da alle Mengen aus K_1 das Element A_{N+1} enthalten und die übrigen $n-1$ Elemente der Menge $\{A_1, \dots, A_N\}$ entnommen sind, besteht K_1 nach Induktionsvoraussetzung aus $\binom{N}{n-1}$ Mengen. Damit ergibt sich

$$C_n^{N+1} = \binom{N}{n} + \binom{N}{n-1} = \binom{N+1}{n}.$$

□

3.4 Einfache Urnenexperimente

In einer Urne seien N Kugeln, die wir mit den Nummern $1, 2, \dots, N$ versehen. Nacheinander werden n Kugeln zufällig gezogen.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Ziehung durchzuführen:

- mit Zurücklegen: nach jeder Ziehung wird die gezogene Kugel wieder in die Urne zurückgelegt, kann also wieder gezogen werden
- ohne Zurücklegen: jede Kugel kann nur einmal gezogen werden

Das Ergebnis einer gesamten Ziehung kann auf verschiedene Weise angegeben werden:

- Stichprobe in Reihenfolge: als geordnetes n -Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, wobei ω_i die Nummer der bei der i -ten Ziehung gezogenen Kugel ist (z.B. $(1, 2) \neq (2, 1)$)
- Stichprobe ohne Reihenfolge: als Menge mit n Elementen $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. (z.B. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$)

Durch diese Unterscheidungen ergeben sich 4 verschiedene Stichprobenräume.

Beispiel 3.2 Wir betrachten eine Urne mit $N = 3$ Kugeln, d.h. $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$, aus der $n = 2$ Kugeln gezogen werden sollen.

<i>Stichprobe</i>			
<i>in R. mit Z.</i>	<i>in R. ohne Z.</i>	<i>ohne R. mit Z.</i>	<i>ohne R. ohne Z.</i>
(1, 1);		{1, 1};	
(1, 2); (2, 1);	(1, 2); (2, 1);	{1, 2};	{1, 2};
(1, 3); (3, 1);	(1, 3); (3, 1);	{1, 3};	{1, 3};
(2, 2);		{2, 2};	
(2, 3); (3, 2);	(2, 3); (3, 2);	{2, 3};	{2, 3}
(3, 3)		{3, 3}	
$9 = 3^2$	$6 = 3 \cdot 2$	$6 = \binom{3+2-1}{2}$	$3 = \binom{3}{2}$

R. = Reihenfolge

Z. = Zurücklegen

Satz 5 Sei $\mathbb{A} = \{1, \dots, N\}$ die Menge aller Kugeln in der Urne. Dann haben die die vier Stichprobenräume die folgenden Kardinalitäten:

- In Reihenfolge mit Zurücklegen: Als zugehöriger Stichprobenraum kann

$$\Omega_I = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \mathbb{A}, 1 \leq i \leq n \} = \mathbb{A}^n$$

gewählt werden und es gilt

$$|\Omega_I| = N^n$$

- In Reihenfolge ohne Zurücklegen: Als zugehöriger Stichprobenraum kann

$$\Omega_{II} = \{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \mathbb{A}, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \}$$

gewählt werden und es gilt

$$|\Omega_{II}| = N \cdot (N - 1) \cdots (N - n + 1) = \binom{N}{n} n!$$

- Ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen: Als zugehöriger Stichprobenraum kann

$$\Omega_{III} = \{ \{ \omega_1, \dots, \omega_n \} : \omega_i \in \mathbb{A}, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \}$$

gewählt werden und es gilt

$$|\Omega_{III}| = \binom{N}{n}$$

- Ohne Reihenfolge mit Zurücklegen: Als zugehöriger Stichprobenraum kann

$$\Omega_{IV} = \{ \{ \omega_1, \dots, \omega_n \} : \omega_i \in \mathbb{A} \}$$

gewählt werden und es gilt

$$|\Omega_{IV}| = \binom{N + n - 1}{n}$$

Beweis:

- Ziehen wir die erste Kugel, so haben wir N Möglichkeiten. Da wir nach dem Ziehen die Kugel wieder zurücklegen, haben wir auch beim zweiten Ziehen N Möglichkeiten. Also haben wir $N \cdot N = N^2$ verschiedene Möglichkeiten die ersten beiden Kugeln zu ziehen...
- Beim ersten Ziehen haben wir N Möglichkeiten. Da wir diese Kugel nicht zurücklegen, bleiben nur $N - 1$ Kugeln in der Urne und wir haben beim zweiten Ziehen nur noch $N - 1$ Möglichkeiten, also haben wir $N(N - 1)$ Möglichkeiten, die ersten beiden Kugeln zu ziehen...

1	2	3	...	$n - 1$	n
N	$N - 1$	$N - 2$...	$N - (n - 1) + 1$	$N - n + 1$

Damit ergibt sich nun die Behauptung.

- Die Zahl $|\Omega_{II}|$ ist gleich der Anzahl der n -elementigen Teilmengen einer N -elementigen Menge.
- Ein Element aus Ω_{IV} kann auch als Vektor (wir ordnen die Elemente der Menge der Größe nach)

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{n_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{n_2}, \dots, \underbrace{N, \dots, N}_{n_N}$$

mit n Komponenten geschrieben werden. Also

$$\sum_{j=1}^N n_j = n$$

wobei eine oder mehrere Zahlen aus der Menge $\mathbb{A} = \{1, \dots, N\}$ nicht vorkommen müssen.

Einen solchen Vektor kann man darstellen, indem man für jede Komponente als Symbol $*$ wählt, und beim Auftreten eines neuen Elementes zunächst einen Trennstrich einträgt.

Beispiele: $N = 4$ und $n = 6$

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 2, 2, 4) &\longleftrightarrow (** * | ** | | *) \\ (1, 1, 1, 1, 1, 1) &\longleftrightarrow (***** | | |) \\ (1, 1, 1, 3, 3, 3) &\longleftrightarrow (** * | | *** |) \\ (1, 2, 2, 2, 3, 4) &\longleftrightarrow (* | *** | * | *) \end{aligned}$$

Wieviele Vektoren dieser Gestalt gibt es?

Es sind $N - 1$ Trennstriche $|$ auf $N + n - 1$ Symbole von Sternen $*$ und Trennstrichen $|$ zu verteilen und es gibt tatsächlich genau

$$\binom{N + n - 1}{N - 1} = \binom{N + n - 1}{n}$$

Möglichkeiten dies zu tun.

Aufgabe 3.2 Bei einer Wahl sollen unter 20 Kandidaten genau drei angekreuzt werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, falls

1. bei jedem Kandidaten höchstens ein Kreuz
2. bei jedem Kandidaten auch mehrere Kreuze

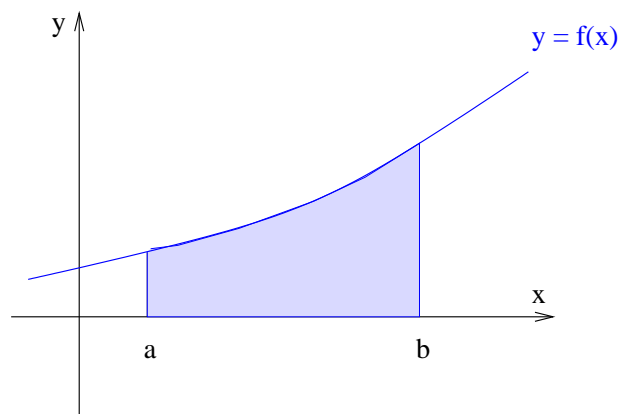
gemacht werden darf/dürfen?

Lösung: $\binom{20}{3}$ und $\binom{22}{3}$

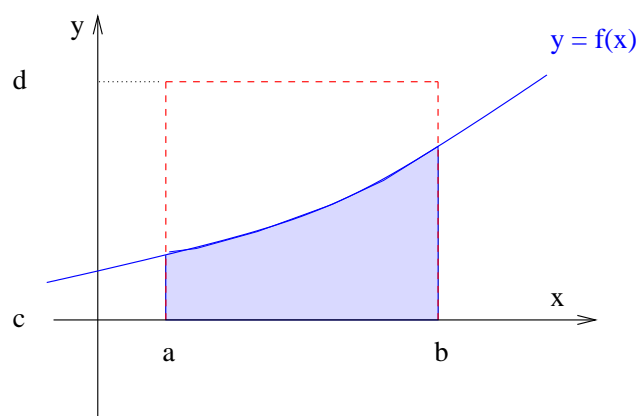
4 Zufallszahlen und Monte-Carlo-Simulationen

Viele Systeme in der Realität und zum Teil auch ihre mathematischen Modelle sind so komplex, dass eine exakte (analytische) Lösung dort auftretender Probleme nicht möglich ist. Mit so genannten Monte-Carlo-Verfahren kann man sich hier (wahrscheinlich) oft beliebig nahe an eine Lösung heran tasten. Dazu werden Zufallszahlen zur Approximation oder Simulation der in dem System ablaufenden Prozesse eingesetzt. Wir wollen das an einem mathematischen Beispiel erläutern.

Beispiel 4.1 (Flächenberechnung durch Monte-Carlo-Verfahren) *Wir wissen aus der Schule, dass Integrale $\int_a^b f(x)dx$ meist nicht analytisch lösbar sind. Allgemein können bestimmte Integrale als (Netto)Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f , der x -Achse und den Grenzen a und b gedeutet werden.*



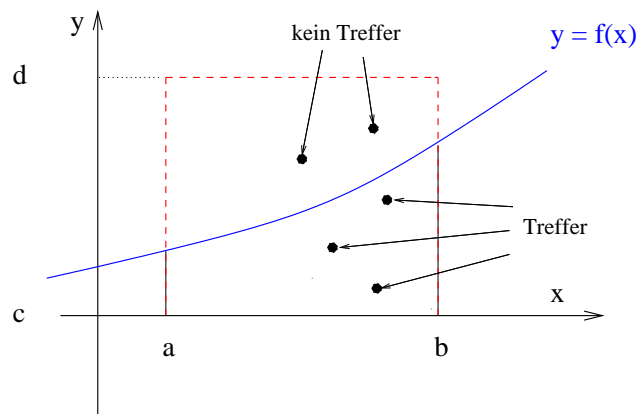
Um diesen Flächeninhalt zu schätzen, wird dieser zunächst innerhalb einer einfachen Fläche (z.B. Rechteck) eingeschlossen.



Dann werden für x und y jeweils n (auf dem jeweiligen Intervall gleichverteilte) Zufallszahlen generiert:

$$x_i \in [a, b] \quad y_i \in [c, d] \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n.$$

Im nächsten Schritt wird für jedes dieser n Paare überprüft, ob $y_i \leq f(x_i)$ gilt. Falls diese Ungleichung erfüllt ist, liegt der Punkt (x_i, y_i) innerhalb der gesuchten Fläche und wird als „Treffer“ gewertet.



Es scheint klar zu sein, dass der Ausdruck

$$\frac{\text{Anzahl Treffer bei } n \text{ Versuchen}}{n} \cdot (b - a) \cdot (d - c) \approx \int_a^b f(x) dx$$

für $n \rightarrow \infty$ (wahrscheinlich) gegen die gesuchte Fläche unter dem Graphen von f konvergiert.

Das Vorgehen im Beispiel ist einfach zu verstehen und es bleibt die Frage, wie man (gleichverteilte) Zufallszahlen effizient erzeugen kann. Wir wollen uns hier auf die Erzeugung von dezimalen Zufallsziffern einschränken.

Definition 4.1 Ein Zufallszahlengenerator ist ein Algorithmus, der eine Folge von Ziffern ausgibt, so dass folgendes gilt:

1. Die Erzeugung der Ziffern der Folge geschieht stochastisch unabhängig.

Die Kenntnis der ersten n Ziffern gibt uns keine Information über die $(n+1)$ -te Ziffer. Wir haben also keine Möglichkeit, aus der Kenntnis einer Teilfolge den Rest der Folge vorherzusagen.

2. Bei der Erzeugung einer Ziffer der Folge sind alle möglichen Ziffern gleichwahrscheinlich.

Für dezimale Ziffernfolgen bedeutet das, dass in jedem Schritt der Folgeerzeugung $0, 1, \dots, 9$ mit der Wahrscheinlichkeit von 0.1 auftreten.

Einige Möglichkeiten, wie man echte Zufallszahlenfolgen auf dem PC erzeugen kann sind:

- Die Firma Intel nutzt das thermische Rauschen eines Widerstands im Pentium-Prozessor, um daraus Zufallszahlen zu generieren (75 000 Bit pro Sekunde).
- Die Firma Maxtor hat ein Verfahren entwickelt, um aus den (höchst komplexen) physikalischen Prozessen in einer Festplatte das Rauschen zu extrahieren und daraus Zufallszahlen zu generieren.

Dabei ist zunächst stets zu klären, ob der genutzte physikalische Prozess wirklich zufällig ist. Dann sollten die gewonnenen Sequenzen so bearbeitet werden, dass die beiden Bits gleichverteilt sind.

Definition 4.2 Ein Pseudozufallszahlengenerator ist ein Algorithmus, der nach Eingabe einer oder mehrerer Initialisierungszahlen deterministisch eine Zahlenfolge erzeugt. Ein solcher Generator erzeugt eine Folge so genannter Pseudozufallszahlen und kann natürlich nie echte Zufallszahlen erzeugen.

Ein einfaches Beispiel für einen Pseudozufallszahlengenerator ist ein so genannter linearer Kongruenzgenerator

$$x_n = (ax_{n-1} + b) \bmod m$$

Der Ausdruck $x \bmod m$ bezeichnet dabei den gewöhnlichen ganzzahligen Rest, der bei der Division von x durch m auftritt. Also ist z.B. $16 \bmod 3 = 1$, denn $16 = 5 \cdot 3 + 1$. Weiterhin gilt:

- $a, b, m \in \mathbb{N}$ („gut gewählt“)
- $x_0 \in \mathbb{N}$ heisst der Schlüssel.

Diese Generatoren besitzen gute statistische Eigenschaften und sind effizient zu implementieren, allerdings auch leicht vorhersagbar.

Beispiel 4.2 $m = 9, a = 7, b = 4, x_0 = 3$

$$\begin{aligned} x_1 &= (7x_0 + 4) \bmod 9 = 25 \bmod 9 = 7 \\ x_2 &= (7x_1 + 4) \bmod 9 = 53 \bmod 9 = 8 \\ x_3 &= (7x_2 + 4) \bmod 9 = 60 \bmod 9 = 6 \\ x_4 &= (7x_3 + 4) \bmod 9 = 46 \bmod 9 = 1 \\ x_5 &= (7x_4 + 4) \bmod 9 = 11 \bmod 9 = 2 \\ x_6 &= (7x_5 + 4) \bmod 9 = 18 \bmod 9 = 0 \\ x_7 &= (7x_6 + 4) \bmod 9 = 4 \bmod 9 = 4 \\ x_8 &= (7x_7 + 4) \bmod 9 = 32 \bmod 9 = 5 \\ x_9 &= (7x_8 + 4) \bmod 9 = 39 \bmod 9 = 3 \end{aligned}$$

Die Folge enthält 9 verschiedene Ziffern.

Beispiel 4.3 $m = 9, a = 6, b = 4, x_0 = 2$

$$\begin{aligned} x_1 &= (6x_0 + 4) \bmod 9 = 16 \bmod 9 = 7 \\ x_2 &= (6x_1 + 4) \bmod 9 = 46 \bmod 9 = 1 \\ x_3 &= (6x_2 + 4) \bmod 9 = 10 \bmod 9 = 1 \\ x_4 &= (6x_3 + 4) \bmod 9 = 10 \bmod 9 = 1 \end{aligned}$$

Die Folge enthält 2 verschiedene Ziffern.

Lineare Kongruenzgeneratoren produzieren periodische (oder irgendwann konstante) Zahlenfolgen, wobei die Periodenlänge höchstens gleich m ist. Wie sollte man die Zahlen a, b und m wählen, um die maximale Periodenlänge zu erreichen?

Satz 6 (Satz von Knuth) *Der lineare Kongruenzgenerator*

$$x_n = (ax_{n-1} + b) \bmod m$$

hat genau dann die Periode m , wenn folgendes gilt:

- 1. $\text{ggT}(b, m) = 1$ (d.h. insbesondere, dass $b \neq 0$ sein muss),*
- 2. jeder Primteiler von m teilt auch $a - 1$ und*
- 3. falls m durch 4 teilbar ist, so auch $a - 1$.*

5 Übungsaufgaben

1. Eine Hockeybundesliga besteht aus zwölf Mannschaften. In einer Saison spielt jede Mannschaft gegen jede andere ein Hin- und Rückspiel. Wieviele Spiele finden insgesamt während einer Saison statt?
2. Bei der Leichtathletik WM sind 22 Athleten mit den Startnummern 1 bis 22 für den 100-Meter-Lauf der Männer gemeldet. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Besetzung des Siegerpodests, wenn die Plätze 1, 2 und 3 nicht unterschieden werden?
3. In einem Tischtennisverein mit zwölf Aktiven wird eine Rangliste für die erste Mannschaft (Plätze 1 bis 6) festgelegt. Wieviele Möglichkeiten gibt es?
4. (Problem von Chevalier de Méré) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, bei 4 Würfeln mit einem Laplacewürfel mindestens einmal eine 6 zu erzielen.

Chevalier de Méré glaubte diese Wahrscheinlichkeit als $4/6 = 2/3$ bestimmt zu haben.

5. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, bei n Würfeln mit einem Laplacewürfel mindestens einmal eine 6 zu erzielen. Für welche n ist die Wahrscheinlichkeit mindestens eine 6 zu erzielen grösser als 0.5?
6. In einer gynäkologischen Abteilung eines Krankenhauses wurden in einem Monat zwölf Kinder geboren. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Kinder am gleichen Tag geboren wurden?

Annahme: Die Geburtshäufigkeit ist über den Monat gleichmässig verteilt und der Monat hat 31 Tage.

Hinweis: Jedem der 12 Kinder (Komponenten eines Vektors) kann ein Geburtstag (natürliche Zahl zwischen 1 und 31) zugeordnet werden.

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{12}) \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, \dots, 31\} \right\}$$

Bevor Sie rechnen: Wie gross schätzen Sie, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit? Würden Sie darauf wetten, dass mindestens zwei Kinder am gleichen Tag geboren wurden?

Resultate einiger Übungsaufgaben

1. 132

2. 1'540

3. $665'280 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

4.

$$P(E) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.518.$$

5.

$$P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{|E^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^n}{6^n}$$

und

$$1 - \frac{5^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{1}{2}$$

nach n auflösen...

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 3.78.$$

Wir müssen also mindestens 4 mal würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine 6 grösser als 0.5 ist.

6. $1 - \frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdots 20}{31^{12}}$