Statistik
Dr. Thomas Zehrt

Zufallsvariablen

Motivation

Bei vielen Zufallsexperimenten tritt als Ergebnis direkt eine reelle Zahl auf, wie z.B. beim Würfeln. Aber selbst wenn die auftretenden Ergebnisse keine Zahlenwerte sind, interessiert man sich häufig für einen durch den Versuchsausgang bestimmten Zahlenwert.

Beispiele:

Zufallsexperiment	Ω	von Interesse
Auswahl eines Autos	Autokennzeichen $\{BS-01, BL-01, \ldots\}$	Geschwindigkeit, CO_2-Ausstoss, durchschnittlicher Verbrauch, ...
Auswahl einer Person	Passnummern $\{17-, 14-, \ldots\}$	Körpergrösse, Vermögen Anzahl Kinder, ...

Mathematisch kann man eine solche Situation als eine Funktion X von der Menge Ω in die reellen Zahlen modellieren. Da das Ergebnis ω vom Zufall abhängt, wird auch der Zahlenwert $X(\omega)$ zufallsabhängig sein. Auch typische Fragen sind schnell formuliert: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Zahlenwert $X(\omega)$ grösser als 1.80 m? Wie sind alle möglichen Werte der Funktion X verteilt? Welchen Mittelwert haben alle möglichen Werte der Funktion X?

Bemerkung: Die Bezeichnung X erinnert an die Bezeichnung eines quantitativen Merkmals im Kapitel ,,Merkmale und Häufigkeitsverteilung". Das ist natürlich **kein** Zufall!

Benötigtes Schulwissen

- Grundwissen über Mengen und (allgemeine) Funktionen
- Gute Kenntnis des Kapitels ,,Merkmale und Häufigkeitsverteilung,,

1 Zufallsvariablen

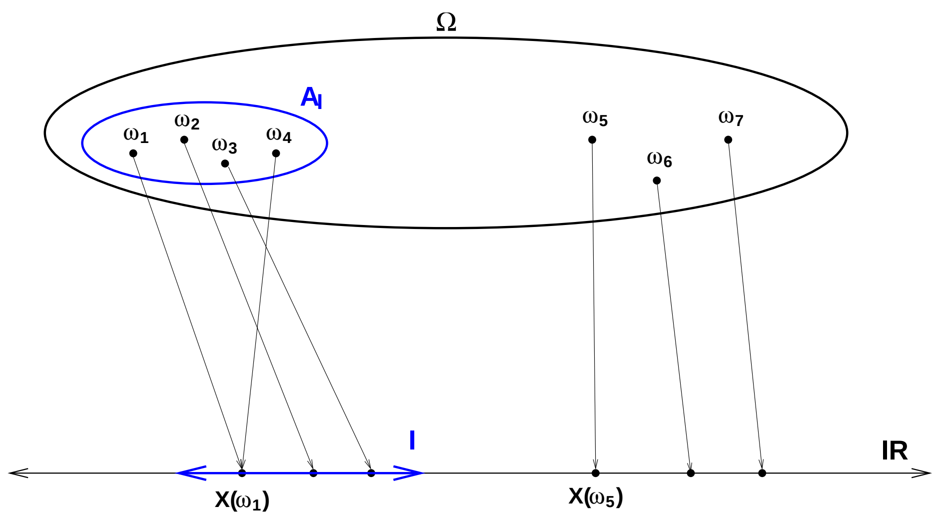
Definition 1.1 *Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heisst eine Abbildung*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine (diskrete und reellwertige) Zufallsvariable, falls alle Ereignisse der Form

- *$\{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = x\} \subset \Omega$ (alle $\omega \in \Omega$ die von X auf x abgebildet werden) für alle reellen Zahlen x und*
- *$A_I = \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in I\} \subset \Omega$ (alle $\omega \in \Omega$ die von X in das Intervall I abgebildet werden) für alle Intervalle I*

Wahrscheinlichkeiten besitzen, die dem Axiomsystem von Kolmogorov genügen.



Eine Zufallsvariable ist also zunächst nichts anderes als eine Funktion. Da ω das Ergebnis eines Zufallsexperimentes ist, ist auch $X(\omega)$ zufällig. Denkt man an die übliche Bedeutung des Terms ,,Variable" in der Mathematik, so erscheint die Bezeichnung Zufallsvariable unpassend, aber sie ist üblich. Da die Menge Ω stets als abzählbar vorausgesetzt wird, ist auch der Wertebereich

$$\mathbb{R}_X \ := \ \{ \ X(\omega) \ : \ \omega \in \Omega \ \} \ = \ \{ \ x_1, x_2, x_3, \ldots \ \}$$

von X abzählbar. Weiterhin können wir jedem Element $x_i \in \mathbb{R}_X$ die Wahrscheinlichkeit zuordnen, mit der die Zufallsvariable X den Wert x_i annimmt:

$$p_i \ = \ P(X = x_i) \ = \ P(\ \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) = x_i\} \ )$$

Definition 1.2 *Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable. Unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Verteilung von X verstehen wir die Menge*

$$\boxed{\{\ (x, P(X = x))\ :\ x \in \mathbb{R}_X\ \}\ =\ \{\ (x_1, p_1), (x_2, p_2), (x_3, p_3), \dots\ \}.}$$

Wir werden das in Zukunft meist in Tabellenform notieren:

x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$

Oft wird man sich aber für die Wahrscheinlichkeit interessieren, dass $X(\omega)$ in einem bestimmten Intervall $I = [a, b]$ oder auch $I = (-\infty, b]$ liegt, also dass $X(\omega) \in I$ gilt. Dazu wählen wir die folgenden Schreibweisen:

$$\begin{aligned} P(X \in I) &= P(\ \{\omega \in \Omega\ :\ X(\omega) \in I\}\ ) \\ P(a \leq X \leq b) &= P(\ \{\omega \in \Omega\ :\ a \leq X(\omega) \leq b\}\ ) \\ P(X \leq b) &= P(\ \{\omega \in \Omega\ :\ X(\omega) \leq b\}\ ). \end{aligned}$$

Definition 1.3 *Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P). Dann heisst die Abbildung $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ mit*

$$\boxed{F(x)\ =\ P(X \leq x)\ =\ P(-\infty \leq X \leq x)\ =\ \sum_{x_j \leq x} p_j}$$

Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen.

Satz 1 (Rechenregeln für Verteilungsfunktionen) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:*

$$\begin{aligned} P(X < a) &= P(X \leq a) - P(X = a)\ =\ F(a) - P(X = a) \\ P(X > a) &= 1 - F(a) \\ P(X \geq a) &= 1 - F(a) + P(X = a) \\ P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) \\ P(a < X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) \\ P(a \leq X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a) \end{aligned}$$

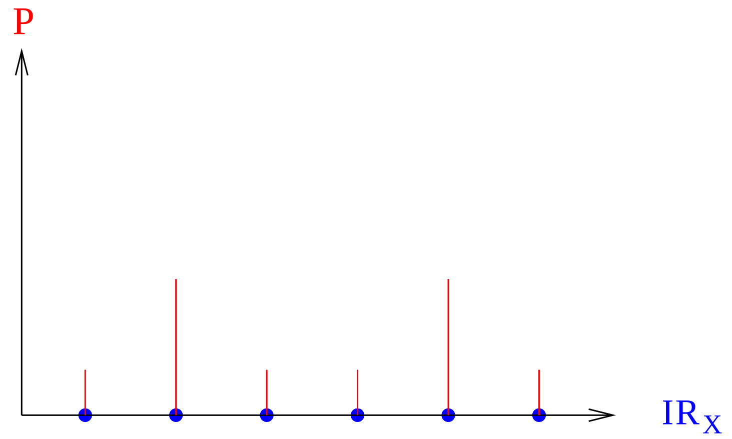
Oft sieht man auch die folgende Wahrscheinlichkeit ($\mu, c \in \mathbb{R}$ und $c > 0$):

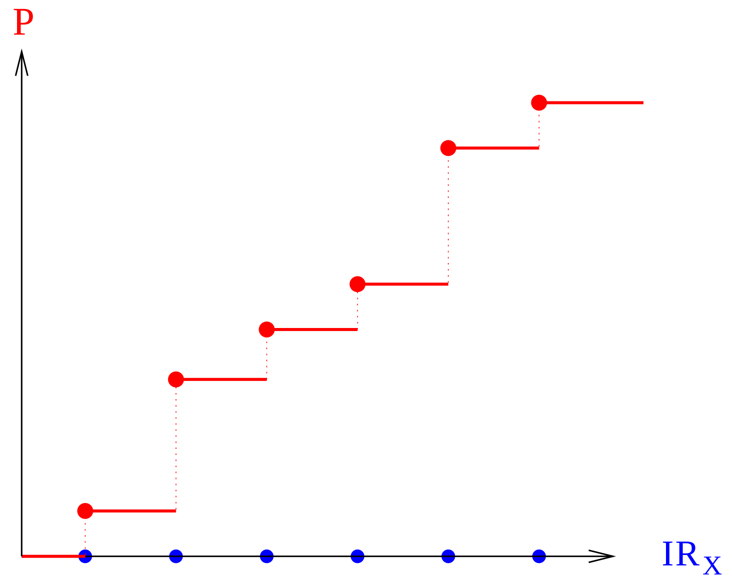
$$P(|X - \mu| < c)\ =\ P(\mu - c < X < \mu + c),$$

die Wahrscheinlichkeit dass X einen Wert im Intervall $(\mu - c, \mu + c)$ annimmt.

Graphisch kann man eine diskrete Zufallsvariable auf folgende Weise darstellen:

- in einem Stabdiagramm: über jeder Stelle x_j errichtet man einen Stab der Länge p_j,
- durch den Graphen der Verteilungsfunktion F

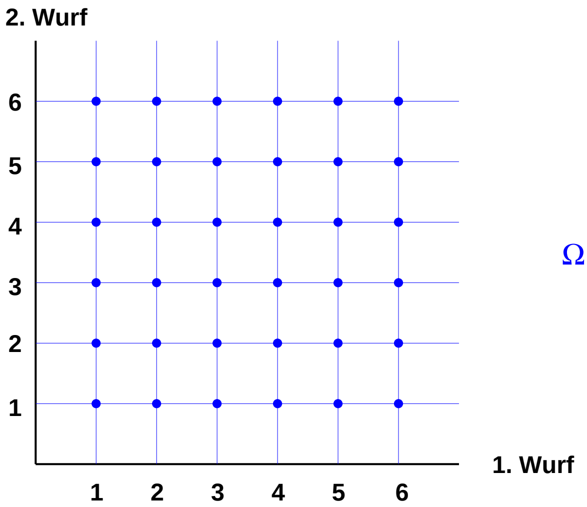


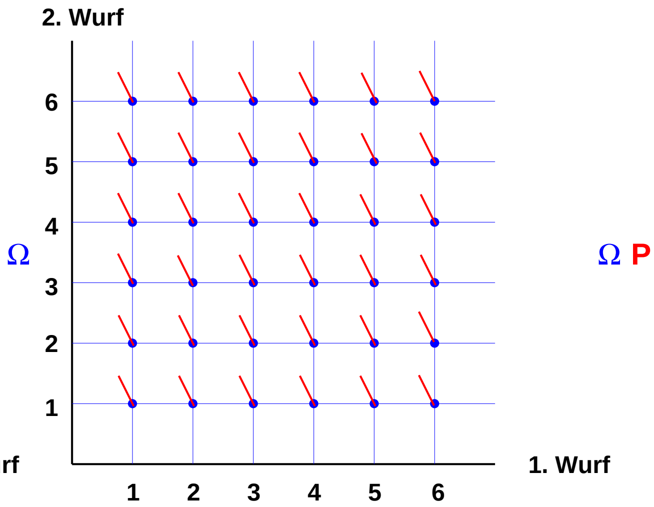


Beispiel 1.1 (Fundamentalbeispiel) *Wir betrachten den zweifachen Wurf eines fairen Würfels und wissen, dass*

$$\Omega \;=\; \{\ (\omega_1, \omega_2)\ :\ \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}\ \}$$

und P die Gleichverteilung auf Ω ist. Das könnte man sich wie folgt vorstellen, insbesondere ist die Menge der Versuchsausgänge keine Teilmenge der reellen Zahlen:





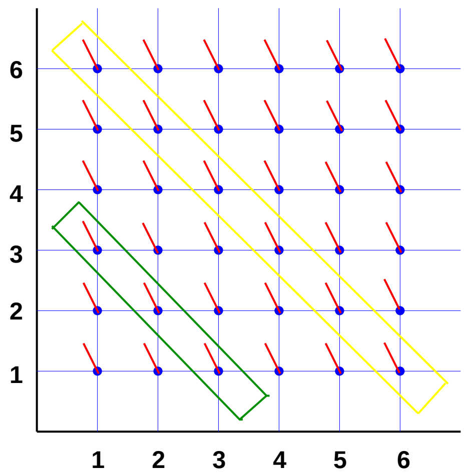
Wir definieren eine Zufallsvariable durch

$$\begin{array}{rcl} X: \quad \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \longmapsto & \omega_1 + \omega_2 \end{array}$$

für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$, d.h. X ist eine Funktion die jedem Ergebnis des Experimentes die Augensumme zuordnet.

Es gilt zunächst $\mathbb{R}_X \;=\; \{\ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\ \}$ und um die zugörigen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, überlegen wir uns, wieviele verschiedene Ereignisse zur selben Augensumme führen. So gilt z.B.

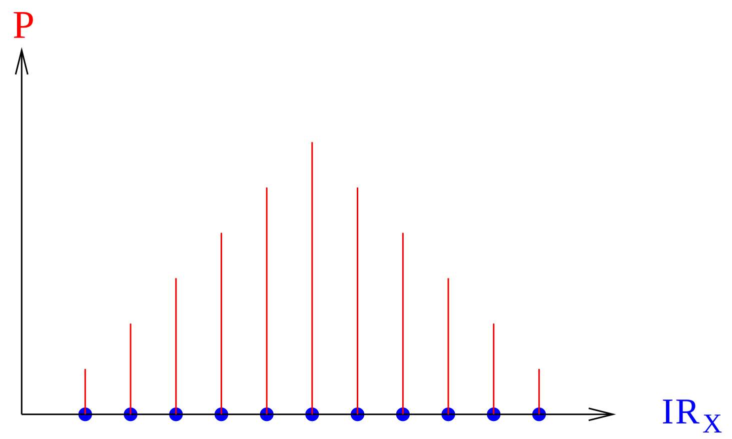
$$\begin{aligned} P(X=4) \;&=\; P(\ (3,1)\ \mathit{oder}\ (2,2)\ \mathit{oder}\ (1,3)\ ) \;=\; \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \;=\; \frac{3}{36} \\ P(X=7) \;&=\; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \frac{6}{36} \end{aligned}$$



x	*Elemente in* $X^{-1}(x)$	$\lvert X^{-1}(x)\rvert$	$P(X=x)$
2	$(1,1)$	1	$1/36$
3	$(1,2),(2,1)$	2	$2/36$
4	$(1,3),(2,2),(3,1)$	3	$3/36$
5	$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$	4	$4/36$
6	$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$	5	$5/36$
7	$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$	6	$6/36$
8	$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$	5	$5/36$
9	$(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)$	4	$4/36$
10	$(4,6),(5,5),(6,4)$	3	$3/36$
11	$(5,6),(6,5)$	2	$2/36$
12	$(6,6)$	1	$1/36$

Damit ergibt sich letztendlich die folgende Verteilung für X*:*

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



Die Verteilungsfunktion von X *ist:*

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<2 \\ 1/36 & , \quad 2\le x<3 \\ 3/36 & , \quad 3\le x<4 \\ 6/36 & , \quad 4\le x<5 \\ 10/36, & \quad 5\le x<6 \\ 15/36, & \quad 6\le x<7 \\ 21/36, & \quad 7\le x<8 \\ 26/36, & \quad 8\le x<9 \\ 30/36, & \quad 9\le x<10 \\ 33/36, & \quad 10\le x<11 \\ 35/36, & \quad 11\le x<12 \\ 36/36, & \quad 12\le x \end{cases}$$

2 Erwartungswert und Varianz

Definition 2.1 *X sei eine diskrete Zufallsvariable auf (Ω, P) mit $\mathbb{R}_X = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \}$. Dann ist der Erwartungswert $E(X) = \mu$ von X definiert durch*

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{P(X = x_i)}_{p_i} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)}$$

Die Varianz $Var(X) = \sigma^2$ der Zufallsvariablen X (mit dem Erwartungswert $\mu = E(X)$) ist:

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \underbrace{P(X = x_i)}_{p_i} = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - \mu)^2 P(\omega)}$$

Die positive Quadratwurzel der Varianz heisst Standardabweichung von X.

Der Erwartungswert $E(X)$ kann als Schwerpunkt der mit der Dichte belasteten reellen Zahlengerade interpretiert werden. Die Varianz misst die durchschnittliche quadratische Abweichung der Werte von X vom Erwartungswert $E(X)$.

Satz 2 (Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz I)
Seien X, Y Zufallsvariablen auf (Ω, P) und a, b, c reelle Zahlen. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $E(aX + b) = a\, E(X) + b$
2. $Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$
3. $E(aX + bY + c) = a\, E(X) + b\, E(Y) + c$
4. *Verschiebungssatz der Varianz*
$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Beweis:
Wir beweisen nur den Verschiebungssatz und benutzen die Abkürzung $\mu = E(X)$:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\, P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)\, P(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, P(X = x_i) - 2\mu \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)}_{=\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)}_{=1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, P(X = x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.1 *Bestimmen Sie für die Zufallsvariable X aus dem Fundamentalbeispiel den Erwartungswert und die Varianz.*

Lösung:

Die Verteilung von X war:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Damit folgt für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=2}^{12} i \cdot P(X = i) \\
&= 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} \\
&= \frac{252}{36} = 7
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hätte man auch erraten können, da die Verteilung von X symmetrisch zum Punkt 7 ist.

Zur Berechnung der Varianz ist meist der Verschiebungssatz besser geeignet. Wir geben hier aber beide Rechenwege an:

- $$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=2}^{12} (i-7)^2 \, P(X = i) \\
&= (2-7)^2\frac{1}{36} + (3-7)^2\frac{2}{36} + (4-7)^2\frac{3}{36} + (5-7)^2\frac{4}{36} \\
&\quad +(6-7)^2\frac{5}{36} + (7-7)^2\frac{6}{36} + (8-7)^2\frac{5}{36} + (9-7)^2\frac{4}{36} \\
&\quad +(10-7)^2\frac{3}{36} + (11-7)^2\frac{2}{36} + (12-7)^2\frac{1}{36} \\
&= 25\frac{1}{36} + 16\frac{2}{36} + 9\frac{3}{36} + 4\frac{4}{36} + 1\frac{5}{36} + 0\frac{6}{36} + 1\frac{5}{36} + 4\frac{4}{36} + 9\frac{3}{36} + 16\frac{2}{36} + 25\frac{1}{36} \\
&= \frac{210}{36}
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= 2^2\frac{1}{36} + 3^2\frac{2}{36} + 4^2\frac{3}{36} + 5^2\frac{4}{36} + 6^2\frac{5}{36} + 7^2\frac{6}{36} \\
&\quad +8^2\frac{5}{36} + 9^2\frac{4}{36} + 10^2\frac{3}{36} + 11^2\frac{2}{36} + 12^2\frac{1}{36} - 7^2 = \frac{210}{36}
\end{aligned}$$

3 Unabhängige Zufallsvariablen

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen (auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum). Zunächst bemerken wir, dass dann z.B. auch $X+Y$, $X\cdot Y$, $2X+3Y$, $\sin(X)+\cos(Y)$ neue Zufallsvariablen sind, deren Verteilung sich leicht aus den Verteilungen von X und Y herleiten lassen.

Um einige wichtige Sätze über Erwartungswerte und Varianzen formulieren zu können müssen wir den Begriff der Unabhängigkeit von Ereignissen auf Zufallsvariablen übertragen. In Zukunft müssen wir stets und sorgfältig zwischen unabhängigen und nicht unabhängigen Zufallsvariablen unterscheiden.

Insbesondere dürfen Sie **nie** grundlos Unabhängigkeit voraussetzen!

Definition 3.1 *Seien X und Y zwei (diskrete) Zufallsvariablen mit $\mathbb{R}_X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots \}$ und $\mathbb{R}_Y = \{ y_1, y_2, y_3, \dots \}$. Dann heissen X und Y (stochastisch) unabhängig, falls für* **alle** *$x_i \in \mathbb{R}_X$ und* **alle** *$y_j \in \mathbb{R}_Y$ die Ereignisse $(X = x_i)$ und $(Y = y_j)$ unabhängig sind, also falls*

$$\begin{aligned} P(\,(X=x_i) \text{ und } (Y=y_j)\,) &= P(\,X=x_i\,)\cdot P(\,Y=y_j\,) \quad \text{oder} \\ P(\,X=x_i \mid Y=y_j\,) &= P(\,X=x_i\,). \end{aligned}$$

Beispiel 3.1 *Ein Laplace-Würfel wird zweimal geworfen, X sei die Augenzahl beim ersten Wurf und Y die beim zweiten Wurf. Sind X und Y abhängig oder unabhängig?*

Lösung:

Zunächst ist $\mathbb{R}_X = \mathbb{R}_Y = \{1,2,3,4,5,6\}$ und für **jede** *Auswahl $i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}$ gilt:*

$$\frac{1}{36} = P(\,(X=i) \text{ und } (Y=j)\,) = P(\,X=i\,)\cdot P(\,Y=j\,) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}.$$

X und Y sind somit unabhängig.

Zusätzlich wollen wir noch die Verteilungen von $S = X+Y$ (vergl. Fundamentalbeispiel) und $M = X\cdot Y$ angeben.

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

m_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	36
$P(M=m_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{0}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	…	$\frac{1}{36}$

Beispiel 3.2 *In einer Urne seien* 6 *Kugeln, durchnummeriert von* 1 *bis* 6*. Es werden zwei Kugeln* **ohne** *Zurücklegen gezogen.* X *sei die Nummer der ersten und* Y *die der zweiten Kugel. Sind* X *und* Y *abhängig oder unabhängig?*

Lösung:

Zunächst ist $\mathbb{R}_X = \mathbb{R}_Y = \{1,2,3,4,5,6\}$ *und sicher kann dieselbe Zahl nicht zweimal gezogen werden. Deshalb folgt z.B.:*

$$0 \;=\; P(\,(X=1)\ \mathit{und}\ (Y=1)\,) \;\neq\; \underbrace{P(\,X=1\,)}_{\neq 0}\cdot\underbrace{P(\,Y=1\,)}_{\neq 0}.$$

X *und* Y *sind somit nicht unabhängig.*

Sind X und Y nun zunächst beliebige Zufallsvariablen. Dann gilt für den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X \cdot Y$:

$$E(X \cdot Y) \;=\; \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i \text{ und } Y = y_j).$$

Falls nun X und Y unabhängig sind, können wir diesen Ausdruck vereinfachen:

$$\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i \text{ und } Y = y_j) \\
&= \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \\
&= \sum_i \sum_j x_i \cdot P(X = x_i) \cdot y_j \cdot P(Y = y_j) \\
&= \left(\sum_i x_i \cdot P(X = x_i) \right) \cdot \left(\sum_j y_j \cdot P(Y = y_j) \right) \\
&= E(X) \cdot E(Y)
\end{aligned}$$

Definition 3.2 *Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf (Ω, P) mit den Erwartungswerten $\mu_X = E(X)$ und $\mu_Y = E(Y)$. Die Grösse*

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &:= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\
&= \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X) \cdot (y_j - \mu_Y) \cdot P(X = x_i \textit{ und } Y = y_j)
\end{aligned}$$

heisst Kovarianz von X und Y. Der Korrelationskoeffizient von X und Y ist

$$\rho_{XY} \;=\; \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}.$$

Achtung:

Sind X und Y unabhängig, so gilt stets $Cov(X,Y) = 0$ und somit auch $\rho_{XY} = 0$. Unabhängige Zufallsvariablen sind also immer unkorelliert. Die Umkehrung gilt aber im allgemeinen nicht! Es gibt also unkorellierte Zufallsvariablen die nicht unabhägig sind.

Beispiel

X / Y	-1	0	1	
-1	$1/5$	0	$1/5$	$2/5$
0	0	$1/5$	0	$1/5$
1	$1/5$	0	$1/5$	$2/5$
	$2/5$	$1/5$	$2/5$	

Weiterhin können wir mit Hilfe des Verschiebungssatzes die folgende Rechnung vornehmen:

$$
\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E((X+Y)^2) - [E(X+Y)]^2 \\
&= E(X^2 + 2X \cdot Y + Y^2) - [E(X)+E(Y)]^2 \\
&= E(X^2) + 2\,E(X \cdot Y) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2\,E(X)\,E(Y) - [E(Y)]^2 \\
&= \underbrace{E(X^2) - [E(X)]^2}_{=Var(X)} + \underbrace{E(Y^2) - [E(Y)]^2}_{=Var(Y)} + 2(\underbrace{E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)}_{=:Cov(X,Y)}) \\
&= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)
\end{aligned}
$$

Satz 3 (Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz II)
Seien X und Y Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= E(X) \cdot E(Y) + Cov(X,Y) \\
Var(X \pm Y) &= Var(X) + Var(Y) \pm 2\,Cov(X,Y)
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.3 *Ein Laplace-Würfel wird zweimal geworfen, X sei die Augenzahl beim ersten Wurf und Y die beim zweiten Wurf. Berechnen Sie die Erwartungswerte, Varianzen und die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen.*

Lösung: *Zunächst ist wieder $\mathbb{R}_X = \mathbb{R}_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und*

$$\begin{aligned} E(X) \;=\; E(Y) &= \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} \;=\; 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} \;=\; \frac{7}{2} \\ Var(X) \;=\; Var(X) &= 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} - (7/2)^2 \;=\; \frac{35}{12} \end{aligned}$$

Für die Kovarianz ergibt sich:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\ &= \quad \frac{1\cdot 1}{36} + \frac{1\cdot 2}{36} + \frac{1\cdot 3}{36} + \frac{1\cdot 4}{36} + \frac{1\cdot 5}{36} + \frac{1\cdot 6}{36} \\ &\quad + \frac{2\cdot 1}{36} + \frac{2\cdot 2}{36} + \frac{2\cdot 3}{36} + \frac{2\cdot 4}{36} + \frac{2\cdot 5}{36} + \frac{2\cdot 6}{36} \\ &\quad + \frac{3\cdot 1}{36} + \frac{3\cdot 2}{36} + \frac{3\cdot 3}{36} + \frac{3\cdot 4}{36} + \frac{3\cdot 5}{36} + \frac{3\cdot 6}{36} \\ &\quad + \frac{4\cdot 1}{36} + \frac{4\cdot 2}{36} + \frac{4\cdot 3}{36} + \frac{4\cdot 4}{36} + \frac{4\cdot 5}{36} + \frac{4\cdot 6}{36} \\ &\quad + \frac{5\cdot 1}{36} + \frac{5\cdot 2}{36} + \frac{5\cdot 3}{36} + \frac{5\cdot 4}{36} + \frac{5\cdot 5}{36} + \frac{5\cdot 6}{36} \\ &\quad + \frac{6\cdot 1}{36} + \frac{6\cdot 2}{36} + \frac{6\cdot 3}{36} + \frac{6\cdot 4}{36} + \frac{6\cdot 5}{36} + \frac{6\cdot 6}{36} \\ &\quad - \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Natürlich ist diese Rechnung eigentlich überflüssig, denn wir wissen bereits, dass X und Y unabhängig sind. Daraus folgt:

$$Cov(X,Y) \;=\; E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \;=\; 0.$$

Satz 4 (Zusammenfassung der Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz)

Seien X, Y Zufallsvariablen und a, b, c reelle Zahlen. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

1. $E(aX + bY + c) = a\, E(X) + b\, E(Y) + c$
2. $Var(aX + b) = a^2\, Var(X)$
3. *Verschiebungssatz der Varianz*

$$Var(X) \;=\; E(X^2) - [E(X)]^2$$

4. $E(X \cdot Y) \;=\; E(X) \cdot E(Y) + Cov(X, Y)$
5. $Var(X \pm Y) \;=\; Var(X) + Var(Y) \pm 2\, Cov(X, Y)$

Seien X und Y **unabhängige** *Zufallsvariablen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= E(X) \cdot E(Y) \\ Var(X \pm Y) &= Var(X) + Var(Y) \\ Cov(X, Y) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 3.4

Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $E(X) = 1$, $Var(X) = 1$, $E(Y) = 2$ und $Var(Y) = 4$. Dann gilt z.B.

$$E(2 \cdot X + 3 \cdot Y) \;=\; 2 \cdot E(X) + 3 \cdot E(Y) \;=\; 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \;=\; 8$$

$$Var(2 \cdot X + 3 \cdot Y) \;=\; 2^2 \cdot Var(X) + 3^2 \cdot Var(Y) \;=\; 4 \cdot 1 + 9 \cdot 4 \;=\; 40$$

$$\begin{aligned} E(2 \cdot X^2 + 4 \cdot Y^2) &= 2 \cdot E(X^2) + 4 \cdot E(Y^2) \\ &= 2 \cdot (\; Var(X) + [E(X)]^2 \;) + 4 \cdot (\; Var(Y) + [E(Y)]^2 \;) \\ &= 2 \cdot (\; 1 + 1^2 \;) + 4 \cdot (\; 4 + 2^2 \;) \\ &= 36 \end{aligned}$$

4 Die Ungleichung von Tschebyschev

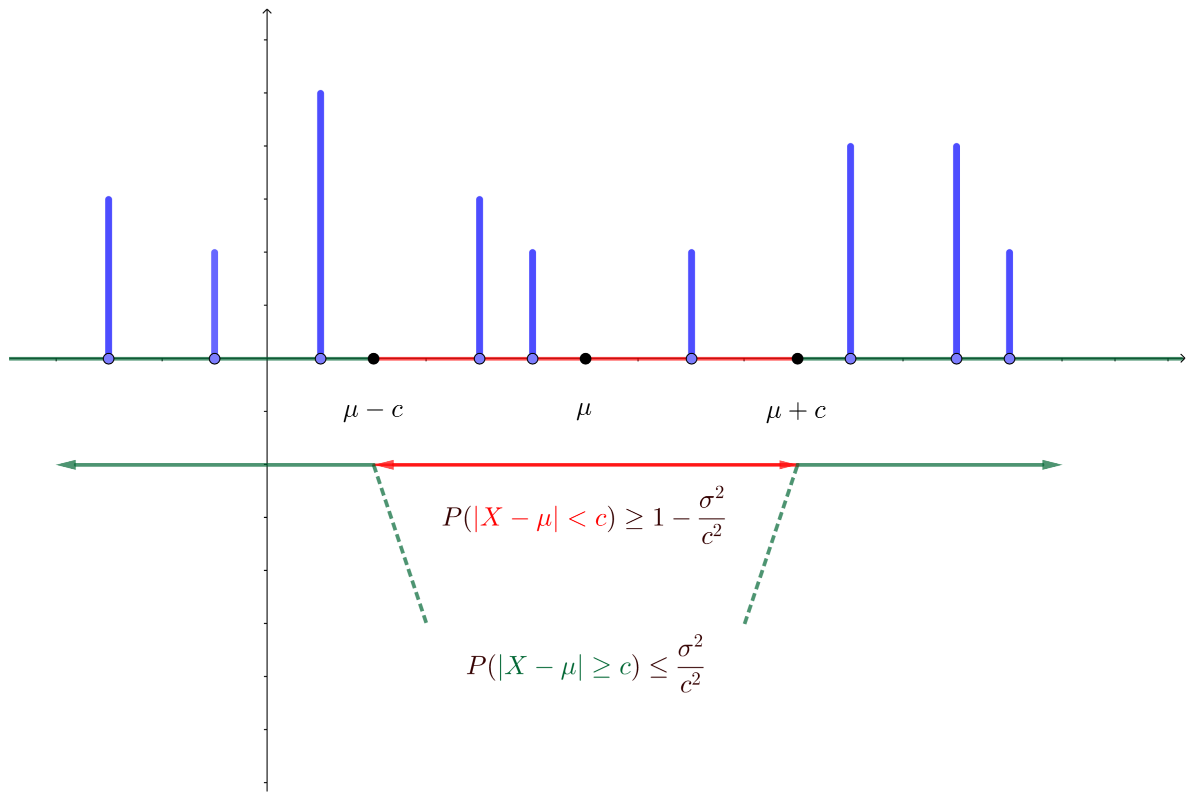
Sei μ eine beliebige reelle Zahl und $c > 0$. Überlegen Sie sich, dass die folgenden Identitäten für Teilmengen reeller Zahlen gelten. Die rechten Seiten sind dabei Intervalle bzw. Vereinigungen von Intervallen.

- $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-\mu| < c \} \;=\; (\mu - c, \mu + c)$
- $\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-\mu| \geq c \} \;=\; (-\infty, \mu - c] \cup [\mu + c, \infty)$

Satz 5 (Die Ungleichung von Tschebyschev) *Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = Var(X)$. Dann gelten für jede positive Zahl c die folgenden beiden (äquivalenten) Ungleichungen:*

$$\boxed{P(\,|X-\mu| < c\,) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \qquad \textit{oder} \qquad P(\,|X-\mu| \geq c\,) \leq \frac{\sigma^2}{c^2}}$$

d.h. man kann relativ leicht die Wahrscheinlichkeit abschätzen, mit der X einen Wert innerherhalb (oder ausserhalb) des Intervalls $(\mu - c, \mu + c)$ annimmt.



Beweis:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{x_i} (x_i-\mu)^2\, P(X=x_i) \\
&\geq \sum_{\substack{x_i \ s.d. \\ |x_i-\mu|\geq c}} (x_i-\mu)^2\, P(X=x_i) \\
&\geq \sum_{\substack{x_i \ s.d. \\ |x_i-\mu|\geq c}} c^2\, P(X=x_i) \\
&= c^2\, P(|X-\mu|\geq c)
\end{aligned}$$

und auflösen nach $P(|X-\mu|\geq c)$ ergibt die Ungleichung von Tschebyschev für den Aussenbereich. □

Beispiel 4.1 *Wir wollen uns wieder unser Fundamentalbeispiel ansehen, d.h. die Zufallsvariable X mit der Verteilung:*

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Wir wissen bereits, dass $E(X)=\mu=7$ und $Var(X)=\sigma^2=35/6$ ist. Somit gilt für jede positive Zahl c die Ungleichung von Tschebyschev:

$$P(\,|X-7|<c\,)\geq 1-\frac{35/6}{c^2}.$$

Da wir hier die Verteilung von X kennen (was nicht immer der Fall ist), können wir die Wahrscheinlichkeiten auf der linken Seite natürlich exakt bestimmen und wir wollen die exakten Werte (für einige c) mit den unteren Schranken vergleichen, die uns die Ungleichung von Tschebyschev liefert.

c	X	$P(\,|X-7|<c\,)$ *exakt*	$1-\frac{35/6}{c^2}$
$c=1$	$|X-7|<1$ *oder* $X\in(6,8)$	$P(\,|X-7|<1\,)\approx 0.1667$	$1-\frac{35/6}{1^2}\approx -4.8333$
$c=2$	$|X-7|<2$ *oder* $X\in(5,9)$	$P(\,|X-7|<2\,)\approx 0.4444$	$1-\frac{35/6}{2^2}\approx -0.4583$
$c=3$	$|X-7|<3$ *oder* $X\in(4,10)$	$P(\,|X-7|<3\,)\approx 0.6667$	$1-\frac{35/6}{3^2}\approx 0.3518$
$c=4$			
$c=5$			

Man sieht hier, dass die unteren Schranken richtig, aber manchmal trivial sind.

Beispiel 4.2 *Von einer Zufallsvariablen X sei nur bekannt, dass sie den Erwartungswert* 15 *und die Varianz* 4 *besitzt. Wie gross ist $P(10 < X < 20)$ mindestens?*

Lösung:

$$P(10 < X < 20) \;=\; P(|X-15| < 5) \;\geq\; 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \;=\; 1 - \frac{4}{25} \;=\; \frac{21}{25}$$

Anwendung der Ungleichung von Tschebyschev: <u>$k\sigma$- Bereiche</u> Was liefert uns die Ungleichung von Tschebyschev für spezielle Wahlen der Konstanten c? Dabei wollen wir uns die Fälle $c = k \cdot \sigma$ für $k = 1, 2$ und 3 genauer anschauen. Mit den üblichen Abkürzungen $\mu = E(X)$ und $\sigma^2 = Var(X)$ folgt aus der ersten Ungleichung von Tschebyschev zunächst:

$$P(\ |X-\mu| < k \cdot \sigma\ ) \;\;\geq\;\; 1 - \frac{\sigma^2}{k^2 \cdot \sigma^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

Daraus lassen sich dann unmittelbar die ersten drei $k\sigma$-Regeln ableiten:

1. $k = 1$, die <u>$1 \cdot \sigma$-Regel</u>

$$P(\ |X-\mu| < \sigma\ ) \;\;\geq\;\; 1 - 1 = 0$$

2. $k = 2$, die <u>$2 \cdot \sigma$-Regel</u>

$$P(\ |X-\mu| < 2 \cdot \sigma\ ) \;\;\geq\;\; 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3. $k = 3$, die <u>$3 \cdot \sigma$-Regel</u>

$$P(\ |X-\mu| < 3 \cdot \sigma\ ) \;\;\geq\;\; 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

5 Übungsaufgaben

1. Eine Zufallsvariable X kann nur die Werte 1, 3, 5 und 7 annehmen. Über X seien folgende Angaben (Verteilung) bekannt:

k	$P(X = k)$
1	0.1
3	0.4
5	0.3
7	0.2

   Bestimmen Sie

   (a) den Erwartungswert und die Varianz von X,

   (b) die Verteilung von $Y = 3X + 2$, sowie den Erwartungswert und die Varianz von Y,

   (c) die Verteilung von $Z = X^2$, sowie den Erwartungswert von Z,

   (d) die Verteilung der Zufallsvariablen $1/X^2$ und

   (e) den Erwartungswert der Zufallsvariablen $1/X^2$.

2. Eine (diskrete) Zufallsvariable X kann nur die Werte 1, 3, 5 und 7 annehmen. Über X seien folgende Angaben bekannt:

k	$P(X \leq k)$
1	0.1
3	0.5
5	0.7
7	1

   Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X sowie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $1/X^2$.

3. X und Y seien die beiden (unabhängigen) Zufallsvariablen mit den folgenden Verteilungen:

k	$P(X = k)$
-1	$1/3$
1	$1/3$
2	$1/3$

k	$P(Y = k)$
-1	$1/5$
1	$4/5$

   Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $Z = X + Y$.

4. Die Zufallsvariablen X und Y nehmen die Werte $1, 2$ und 3 an. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

   $P(X = 1) = 0.5$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(Y = 1) = 0.7$, $P(Y = 2) = 0.2$,

   $P(X = 1 \text{ und } Y = 1) = 0.35$, $P(X = 2 \text{ und } Y = 2) = 0.06$,

   $P(X = 3 \text{ und } Y = 1) = 0.20$.

   Bestimmen Sie alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = i \text{ und } Y = j)$. Sind X und Y unabhängig?

5. Seien X_k für $k = 1, 2, 3$ unabhängige Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $E(X_k) = k$ und $Var(X_k) = k^2$. Bestimmen Sie:

   (a) $E(2 \cdot X_1 + X_2 + 3 \cdot X_3)$

   (b) $E(X_1 - X_2 - X_3)$

   (c) $Var(X_1 + X_2 + X_3)$

   (d) $Var(X_1 - 2 \cdot X_2 - 3 \cdot X_3 + 4)$

   (e) $E(2 \cdot X_1^2 + 4 \cdot X_2^2 + X_3)$

Resultate einiger Übungsaufgaben

1. (a) $E(X) \ = \ 4.2$ und $Var(X) \ = \ 3.36$

   (b) Wenn X die Werte 1, 3, 5 und 7 annimmt, nimmt die Zufallsvariable $Y = 3X+2$ die Werte 5, 11, 17 und 23 (mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten) an, also ist die Verteilung von Y

k	$P(Y = k)$
5	0.1
11	0.4
17	0.3
23	0.2

   Weiterhin ist (siehe die entsprechenden Regeln im Skript)

$$E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = \ldots \quad \text{und} \quad Var(3X + 2) = 3^2\, Var(X) = \ldots$$

   (c) Wenn X die Werte 1, 3, 5 und 7 annimmt, nimmt die Zufallsvariable $Z = X^2$ die Werte 1, 9, 25 und 49 (mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten) an, also ist die Verteilung von Z

k	$P(Z = k)$
1	0.1
9	0.4
25	0.3
49	0.2

   Für den Erwartungswert gilt somit:

$$E(Z) \ = \ 1 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \frac{4}{10} + 25 \cdot \frac{3}{10} + 49 \cdot \frac{2}{10} \ = \ \ldots$$

   (d) Da die Zufallsvariable X die Werte 1, 3, 5 und 7 annimmt, nimmt die Zufallsvariable $1/X^2$ die Werte $1/1^2 = 1$, $1/3^2 = 1/9$, $1/5^2 = 1/25$ und $1/7^2 = 1/49$ an. Die Verteilung ergibt sich daraus wie folgt:

k	$P(1/X^2 = k)$
1	0.1
1/9	0.4
1/25	0.3
1/49	0.2

   (e) Für den Erwartungswert gilt somit:

$$E(Y) \ = \ 1 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{25} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{49} \cdot \frac{2}{10} \ = \ \frac{8'849}{55'125} \ \approx \ 0.1605.$$

2.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.3 \;\approx\; 4.4 \\
E(X^2) &= 1^2 \cdot 0.1 + 3^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.2 + 7^2 \cdot 0.3 \;\approx\; 23.4 \\
Var(X) &= (1-4.4)^2 \cdot 0.1 + (3-4.4)^2 \cdot 0.4 + (5-4.4)^2 \cdot 0.2 + (7-4.4)^2 \cdot 0.3 \;\approx\; 4.04 \\
E(1/X^2) &= 1/1^2 \cdot 0.1 + 1/3^2 \cdot 0.4 + 1/5^2 \cdot 0.2 + 1/7^2 \cdot 0.3 \;\approx\; 0.1586
\end{aligned}
$$

3.

k	$P(X+Y=k)$
-2	$1/15$
0	$5/15$
1	$1/15$
2	$4/15$
3	$4/15$

4.

		Y 1	2	3	Vert. von X
	1	0.35	0.14	0.01	0.5
X	2	0.15	0.06	0.09	0.3
	3	0.2	0	0	0.2
Vert. von Y		0.7	0.2	0.1	

Die beiden Zufallsvariablen sind abhängig, denn

$$0 \;=\; P(X=3 \cap Y=3) \neq P(X=3) \cdot P(Y=3) \;=\; 0.2 \cdot 0.1.$$

5. 13, -4, 14, 98 und 39

Nutzen Sie die Rechenregeln für unabhängige Zufallsvariablen.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& E(2 \cdot X_1^2 + 4 \cdot X_2^2 + X_3) \\
=\; & 2 \cdot E(X_1^2) + 4 \cdot E(X_2^2) + E(X_3) \\
=\; & 2 \cdot (Var(X_1) + [E(X_1)]^2) + 4 \cdot (Var(X_2) + [E(X_2)]^2) + E(X_3) \\
=\; & 2 \cdot (1^2 + 1^2) + 4 \cdot (2^2 + 2^2) + 3 \\
=\; & 39.
\end{aligned}
$$