Universität Basel

Statistik
Dr. Thomas Zehrt

Diskrete (Standard)Verteilungen

Motivation

Viele (auf den ersten Blick sehr verschiedene) Probleme in der Praxis führen zu den selben Wahrscheinlichkeitsverteilungen. So können wir z.B. die folgenden Fragen auf ähnliche Weise behandeln und (zumindest annährend) beantworten: Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- hat eine Familie mit 6 Kindern genau 3 Mädchen?
- werfen wir bei 6 Würfen mit einen (fairen) Würfel genau 3 Sechsen?
- bestehen wir eine Multiple-Choice Prüfung, wenn wir die Antworten nur raten?
- steigt der Kurs einer Aktie innerhalb von 6 Tagen genau 3 mal?

Man könnte diese Liste noch lange fortsetzen und jeder wird einsehen, dass es effizient ist, die Gemeinsamkeit hinter all diesen Problemen zu suchen und zu behandeln. Dieser Abstraktionsprozess liefert uns dann die wahscheinlichkeitstheoretische Quintessenz dieser Probleme und endet hier in der so genannten Binomialverteilung. Diese Verteilung (und noch einige andere wichtige Verteilungen) werden in diesem Kapitel untersucht. Alle Resultate die wir erhalten, können natürlich unmittelbar auf alle obigen Probleme angewandt werden.

Benötigtes Schulwissen

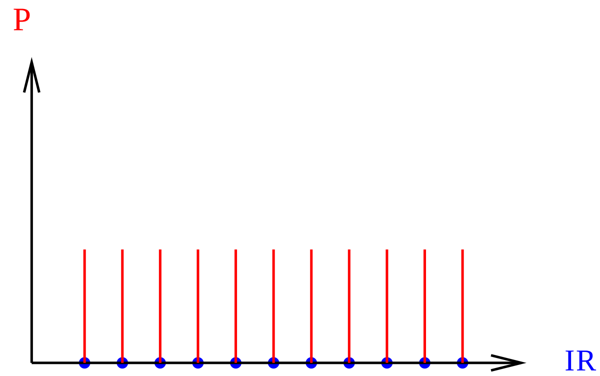
- Bruchrechnung und Prozentrechnung
- Berechnung von Fakultäten und Binomialkoeffizienten

1 Die (diskrete) Gleichverteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X mit den Ausprägungen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ heisst gleichverteilt, wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x_i) \quad = \quad \frac{1}{k}$$

für alle $i = 1, 2, \ldots, k$ gilt.



Verteilung

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$	$\frac{1}{k}$

Erwartungswert $\quad E(X) \quad = \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$

Varianz $\quad Var(X) \quad = \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - E(X)^2$

Beweis:

Die Gleichung für den Erwartungswert ist klar und die für die Varianz folgt aus dem allgemeinen Verschiebungssatz (kann aber auch direkt bewiesen werden). Sei $\mu = E(X)$.

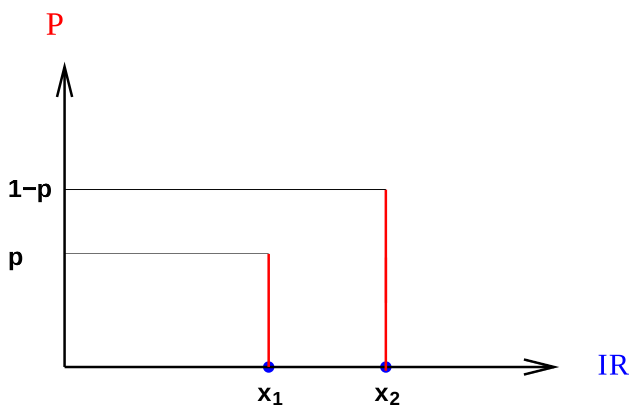
$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \;=\; \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) \\
&= \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} \mu^2 \right) \;=\; \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 2k\mu^2 + k\mu^2 \right) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \mu^2
\end{aligned}$$

$\square$

2 Die Zweipunktverteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X mit nur zwei Ausprägungen x_1 und x_2 heisst zweipunktverteilt. Für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt dann

$$P(X = x_i) = \begin{cases} p & \text{für } i = 1 \\ 1 - p & \text{für } i = 2 \end{cases}$$



Verteilung	x_i	x_1	x_2
	$P(X = x_i)$	p	$1-p$
Erwartungswert	$E(X)$ =		
Varianz	$Var(X)$ =		

Beweis:

Wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.Wir könnten auch sagen, dass wir die Zufallsvariable $(X - x_1)/(x_2 - x_1)$ betrachten.

$$E(X) = x_1 \cdot p + x_2 \cdot (1-p) = 0 \cdot p + 1 \cdot (1-p) = 1 - p$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{2} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) = (0 - (1-p))^2 \cdot p + (1 - (1-p))^2 \cdot (1-p) \\ &= (p-1)^2 \cdot p + p^2 \cdot (1-p) = p \cdot (1-p) \end{aligned}$$

$\square$

3 Die Binomialverteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X mit den Ausprägungen $0, 1, \ldots, n$ heisst binomialverteilt, mit den Parametern n und p (und $q = 1 - p$), wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) \;=\; \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x} \;=\; \binom{n}{x}\, p^x\, q^{n-x} \;=\; f_{Bi}(x; n, p)$$

für alle $x = 0, 1, \ldots, n$ gilt.

	x_i	0	1	$\cdots$	n
Verteilung	$P(X = x_i)$	$\underbrace{\binom{n}{0}\, p^0\, q^{n-0}}_{=q^n}$	$\binom{n}{1}\, p^1\, q^{n-1}$	$\cdots$	$\underbrace{\binom{n}{n}\, p^n\, q^{n-n}}_{=p^n}$
Erwartungswert	$E(X) = n \cdot p$				
Varianz	$Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$				

Wann tritt die Binomialverteilung auf?

- Ein Experiment hat **zwei** mögliche Ergebnisse: Erfolg (E oder 1) und Misserfolg (E^c oder 0)
- Das Experiment wird eine feste Anzahl n mal durchgeführt.
- Die Durchführungen erfolgen **unabhängig** voneinander.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit p im Einzelexperiment ist **konstant**.

$$\boxed{\text{X = Anzahl Erfolge in den n Versuchen}}$$

Dann ist X binomialverteilt. Bezeichnung: $X \sim B(n; p)$

Jedes Elementarereignis eines solchen Experimentes kann durch die Angabe von Erfolg (1) bzw. Misserfolg (0) für jedes Einzelexperiment beschrieben werden. Also kann man die Menge aller möglichen Versuchsausgänge wie folgt notieren:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\ (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i = 0 \text{ oder } 1\ \}\\ &= \{\ (0,0,\ldots,0,0), (0,0,\ldots,0,1), (0,0,\ldots,1,0), (0,0,\ldots,1,1), \ldots, (1,1,\ldots,1,1)\ \}\end{aligned}$$

Das Ereignis „genau x Erfolge (und dann natürlich genau $n - x$ Misserfolge)" , kurz E_x, besteht aus allen Elementen der Menge Ω, die genau x-mal (irgendwo) eine 1 (und dann natürlich genau $(n-x)$-mal eine 0 auf den restlichen Positionen) enthalten. Natürlich ist z.B.

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & \{\ (0,0,\ldots,0,0)\ \} \\ E_1 & = & \{\ (1,0,\ldots,0,0),(0,1,\ldots,0,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\ \} \\ E_n & = & \{\ (1,1,\ldots,1,1)\ \} \end{array}$$

Das Ereignis E_x enthält genau $\binom{n}{x}$ Elemente, das ist die Anzahl der Möglichkeiten genau x der n Positionen auszuwählen (um dort eine 1 zu setzen).

Weiterhin muss jedem Element in E_x die Wahrscheinlichkeit $p^x(1-p)^{n-x}$ zugeordnet werden, weil jeder der x Einzelerfolge mit der Wahrscheinlichkeit p und jeder der $(n-x)$ Einzelmisserfolge mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ (unabhängig voneinander) passiert. Also

$$P(X=x)\ =\ P(E_x)\ =\ \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}.$$

Eine gute Möglichkeit, sich ein Experiment der beschriebenen Art vorzustellen, ist der so genannte <u>Binomialbaum</u>.

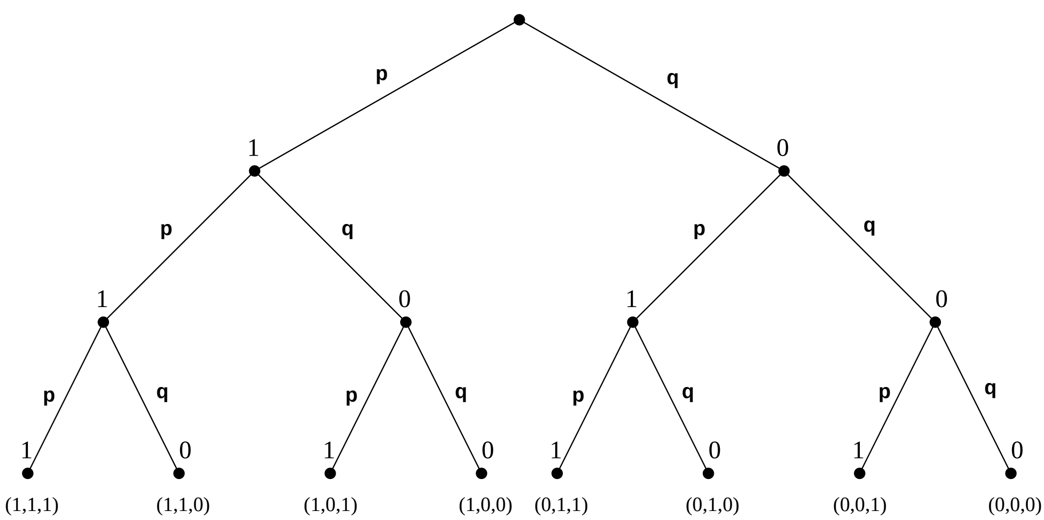
Beispiel 3.1 $X \sim B(3;p)$

$$\begin{array}{rcl} P(X=0)\ =\ P(E_0) & = & P((0,0,0)) \\ & = & \binom{3}{0}\, p^0\, (1-p)^3\ =\ (1-p)^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X=1)\ =\ P(E_1) & = & P((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \\ & = & \binom{3}{1}\, p^1\, (1-p)^2\ =\ 3\,p\,(1-p)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X=2)\ =\ P(E_2) & = & P((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)) \\ & = & \binom{3}{2}\, p^2\, (1-p)^1\ =\ 3\,p^2\,(1-p) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P(X=3)\ =\ P(E_3) & = & P((1,1,1)) \\ & = & \binom{3}{3}\, p^3\, (1-p)^0\ =\ p^3 \end{array}$$



Beweis für die Gültigkeit der Formeln für Erwartungswert und Varianz: Sei $X \sim B(n; p)$. Die obige Beschreibung legt nahe, dass man X als die Summe von identisch zweipunktverteilten und unabhängigen Zufallsvariablen betrachten kann:

$$X \quad = \quad X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

mit $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1-p$ sowie $E(X_i) = p$ und $Var(X_i) = p(1-p)$ für $i = 1, \ldots, n$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \;=\; np \\ Var(X) &= Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) \;=\; np(1-p) \end{aligned}$$

$\square$

Eventuell sollte man sich noch klar machen, dass die Summe aller auftretenden Wahrscheinlichkeiten genau 1 sein muss, dh.

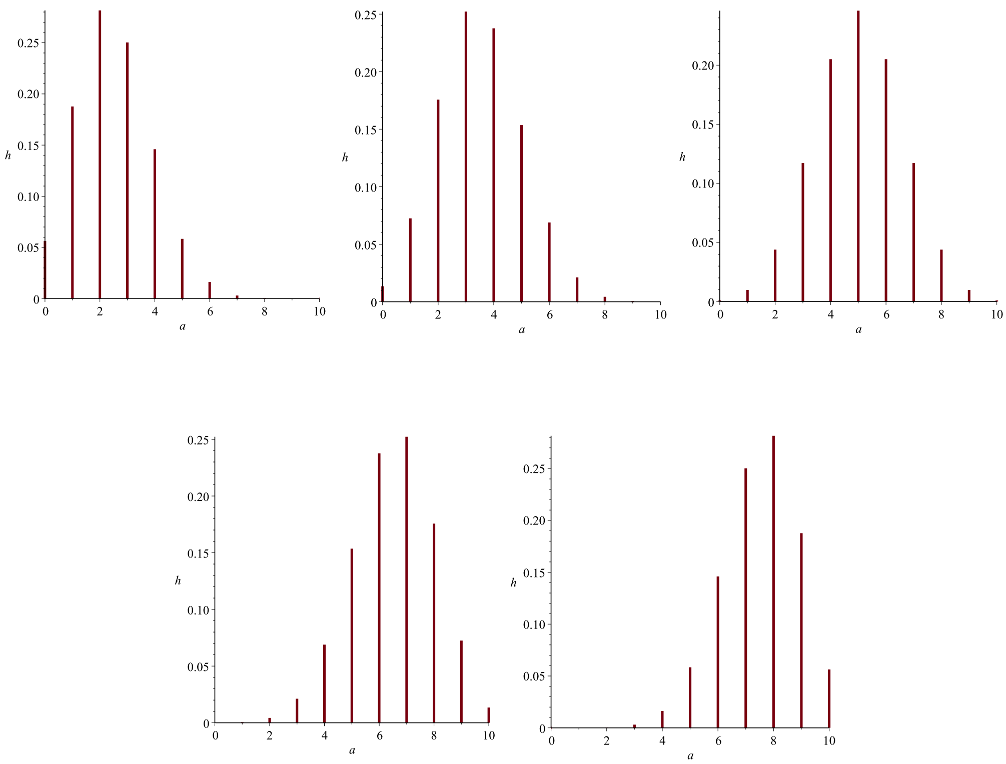
$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x \, (1-p)^{n-x} \quad = \quad 1.$$

Das scheint aus der Konstruktion heraus klar zu sein, denn wir addieren die Wahrscheinlichkeiten aller disjunkter Ereignisse auf. Wer in der Schule den so genannten binomischen Lehrsatz kennen gelernt hat, der besagt, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ stets

$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x \, b^{n-x}$$

gilt, findet wohl auch einen anderen Beweis für die obige Eigenschaft: Wähle einfach $a = p$ und $b = 1-p$.

Beispiel 3.2 *Verteilungen der Binomialverteilung für* $n = 10$ *und* $p = 0.25,\ 0.35,\ 0.5,\ 0.65$ *und* 0.75.



Beispiel 3.3 *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 10-maligen Werfen einer fairen Münze,*

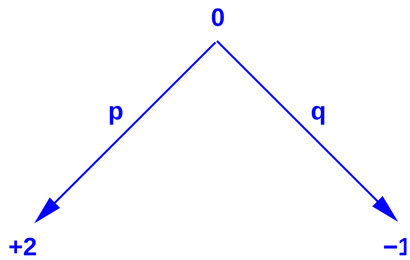
- *genau,*
- *mindestens oder*
- *höchstens*

7-mal „Zahl“ zu erhalten.

Lösung: *Sei X die Anzahl Erfolge bei $n = 10$ Würfen. Sicher gilt $X \sim B(10; 1/2)$ und somit*

$$\begin{aligned} P(X=7) &= \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^3 = \\ P(X \geq 7) &= \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-k} = 0.172 \\ P(X \leq 7) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{k=0}^{7} \binom{10}{k} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} = 0.9453 \end{aligned}$$

Beispiel 3.4 *Aus statistischen Untersuchungen sei bekannt, dass die Aktie der Firma ,,SehrVerlässlich,, an jedem Tag mit der Wahrscheinlichkeit von p um $2,-$ steigt bzw. mit der Wahrscheinlichkeit von $q = 1 - p$ um $1.-$ fällt.*



Sie kaufen diese Aktie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie nach 50 Tagen einen Verlust zu beklagen, falls $p = \frac{1}{3}$.

Lösung:

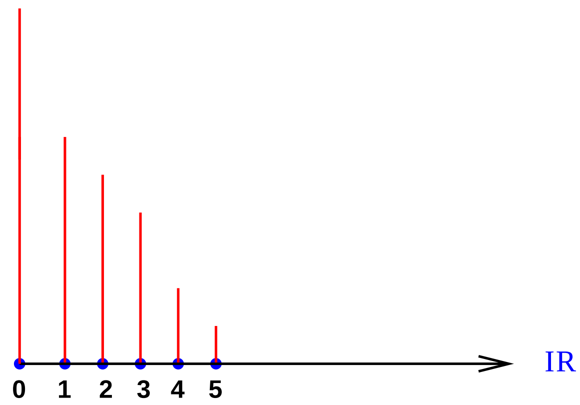
- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{50}) \mid \omega_i \in \{+2, -1\}\}$
- *Resultat nach 50 Tagen (k Erfolge und $50-k$ Misserfolge)* $= k \cdot (+2) + (50-k) \cdot (-1)$
- *Verlust bedeutet* $k \cdot (+2) + (50-k) \cdot (-1) < 0$ *oder* $k \leq 16$
- $$P(\text{,,Verlust''}) = \sum_{k=0}^{16} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{50-k} = 0.4868$$

4 *Die geometrische Verteilung*

Eine diskrete Zufallsvariable X mit den Ausprägungen $0, 1, 2, \ldots$ heisst geometrisch verteilt, mit dem Parameter p und , wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) \;=\; (1-p)^x\, p \;=\; f_{Geo}(x; p)$$

für alle $x = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.



Verteilung

x_i	0	1	2	$\ldots$
$P(X = x_i)$	$(1-p)^0\, p \;=\; p$	$(1-p)^1\, p$	$(1-p)^2\, p$	$\ldots$

Erwartungswert $E(X) \;=\; \dfrac{1-p}{p}$

Varianz $Var(X) \;=\; \dfrac{1-p}{p^2}$

Beweis:

Zunächst ist nicht klar, dass es sich hier wirklich um eine Verteilung handelt. Dazu muss wieder gezeigt werden, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist. Mit Hilfe der Summenformel für **geometrische Reihen** ergibt sich:

$$\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x\, p \;=\; p \cdot \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \;=\; p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} \;=\; 1$$

Zur Berechnung des Erwartungswertes benutzen wir den Trick, den Term hinter dem Summenzeichen als Ableitung einer einfacheren Funktion (nach p) zu schreiben und dann Summation und Differentiation zu vertauschen:

$$\begin{aligned}
E(X) &= p \cdot \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (1-p)^x \;=\; p(1-p) \cdot \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1} \\
&= p(1-p) \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^x \;=\; -p(1-p) \cdot \frac{d}{dp}\left(\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \right) \\
&= -p(1-p) \cdot \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-(1-p)} \right) \;=\; -p(1-p) \cdot \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p} \right) \;=\; \frac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

$\square$

Wann tritt die geometrische Verteilung auf?

- Ein Experiment hat zwei mögliche Ergebnisse: E (Erfolg) und E^c (Misserfolg).
- Das Experiment wird durchgeführt, bis erstmals ein Erfolg eintritt.
- Die Durchführungen erfolgen unabhängig voneinander.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit p ist konstant.

$$\boxed{\text{X} = \quad \text{Anzahl der Versuche } \underline{\text{vor}} \text{ dem ersten Erfolg.}}$$

Dann ist X geometrisch verteilt.

Beispiel 4.1 *In Tunis kann man kein Taxi bestellen und man muss warten, bis zufällig eines vorbei kommt. Die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der nächsten Minute eines kommt betrage dabei (stets) $p = 0.2$. Bestimmen Sie*

1. *die Wahrscheinlichkeit nicht länger als 3 Minuten warten zu müssen,*
2. *die „erwartete Wartezeit".*

Lösung:

- *X sei die Anzahl Minuten, bevor das Taxi kommt*
- *X ist geometrisch verteilte Zufallsvariable*
- $$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4}{1 - \frac{4}{5}} \end{aligned}$$
- $$E(X) = \frac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$$

5 Die hypergeometrische Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X mit den Ausprägungen $0, 1, 2, \ldots, n$ heisst hypergeometrisch verteilt, mit den Parameter n, S, N (wobei $n \leq S$ und $n \leq N - S$), wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) \quad = \quad \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad = f_{Hy}(x; N, S, n)$$

für alle $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ gilt.

Verteilung	x_i	0	1	$\cdots$	n
	$P(X = x_i)$	$\frac{\binom{S}{0}\binom{N-S}{n-0}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{\binom{S}{1}\binom{N-S}{n-1}}{\binom{N}{n}}$	$\ldots$	$\frac{\binom{S}{n}\binom{N-S}{n-n}}{\binom{N}{n}}$

Erwartungswert $\quad E(X) = n \cdot \frac{S}{N}$

Varianz $\quad Var(X) = n \cdot \frac{S}{N}\left(1 - \frac{S}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Wann tritt die hypergeometrische Verteilung auf?

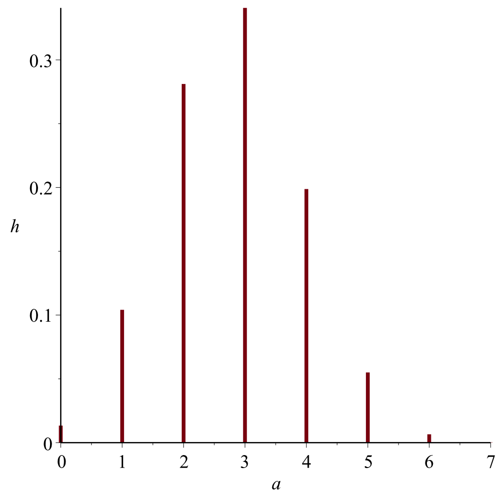
Von N Elementen seien S vom Typ E und $W = N - S$ vom Typ E^c. Eine Stichprobe vom Umfang n wird gezogen (ohne zurücklegen).

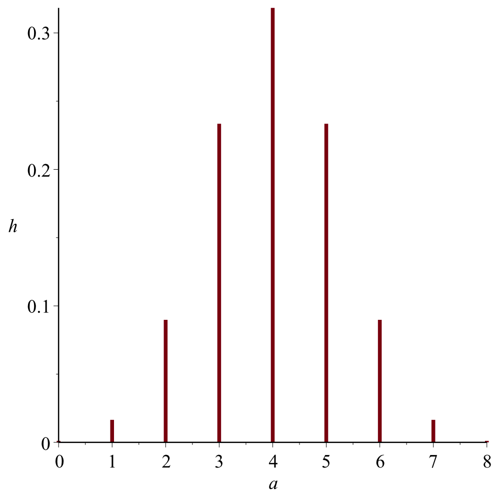
X = Anzahl Elemente vom Typ E in dieser Stichprobe.

Dann ist X hypergeometrisch verteilt.

Verteilung der hypergeometrischen Verteilung für

- $S = 10, W = 15, n = 7$;
- $S = 15, W = 15, n = 8$





Beispiel 5.1 *In einer Urne befinden sich 10 schwarze und 15 weisse Kugeln. Es werden 7 Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlicheit befinden sich unter diesen 7 Kugeln genau 5 schwarze (und 2 weisse)?*

Lösung:

- *X sei die Anzahl schwarzer Kugeln in der Stichprobe*
- *X ist hypergeometrisch verteilt*
- $$P(X = 5) = \frac{\binom{10}{5}\binom{15}{2}}{\binom{25}{7}} = 0.055$$

6 Die Poisson-Verteilung

Eine diskrete Zufallsvariable X mit den Ausprägungen $0, 1, 2, 3 \dots$ heisst poisson-verteilt, mit den Parameter λ, wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) \;=\; \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda} \;=\; f_{Po}(x; \lambda)$$

für alle $x = 0, 1, 2, 3 \dots$ gilt.

Verteilung	x_i	0	1	2	3	$\cdots$
	$P(X = x_i)$	$\frac{\lambda^0}{0!}\, e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^1}{1!}\, e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}\, e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}\, e^{-\lambda}$	$\cdots$
Erwartungswert	$E(X) = \lambda$					
Varianz	$Var(X) = \lambda$					

Wann tritt die Poisson-Verteilung auf?

Ausgehend von zufälligen Ereignissen, die innerhalb eines Kontinuums mit der Intensitätsrate $\lambda > 0$ auftreten, sei

X = Anzahl der Ereignisse innerhalb eines Kontinuums

Dann ist X poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$.

Bezeichnung: $X \sim Po(\lambda)$

Beispiel 6.1 *An einer Tankstelle kommen zwischen 16:00 und 18:00 Uhr (Kontinuum) durchschnittlich 4 (Intensitätsrate = λ) Fahrzeuge pro Minute an. X sei die Anzahl der in einer Minute ankommenden Fahrzeuge. Wir gehen davon aus, dass X poissonverteilt ist.*

Dann gilt z.B.

- *Wahrscheinlichkeit, dass kein Fahrzeug ankommt:*

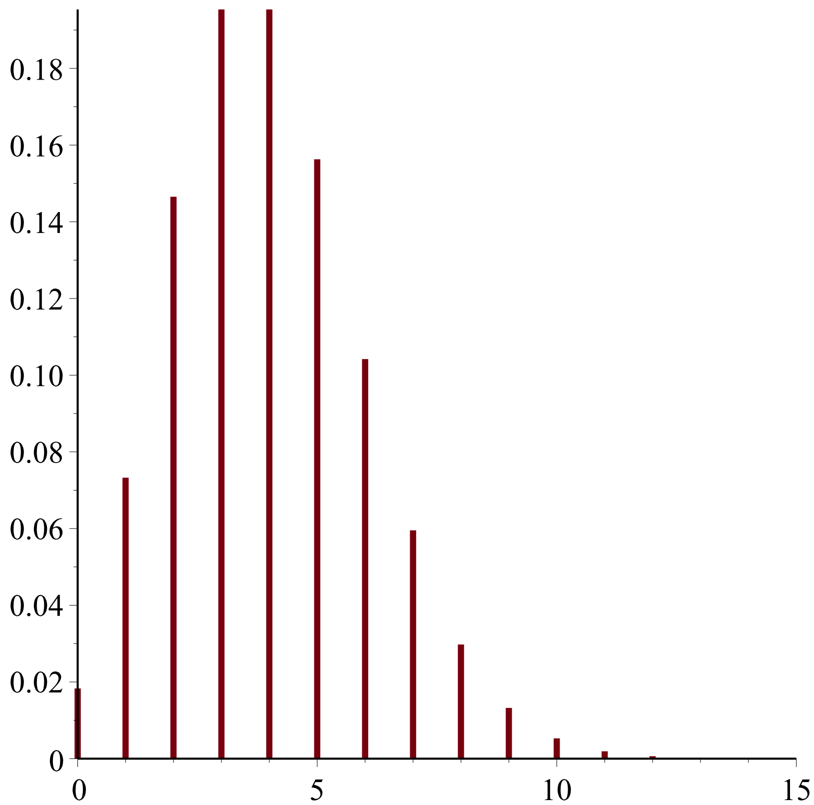
$$P(X=0) \;=\; \frac{4^0}{0!}\,e^{-4} \;=\; 0.0183$$

- *Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Fahrzeuge ankommen:*

$$P(X=2) \;=\; \frac{4^2}{2!}\,e^{-4} \;=\; 0.1465$$

- *Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Fahrzeuge ankommen:*

$$\begin{aligned} & P(X \geq 3) \\ = \;& 1 - P(X < 3) \\ = \;& 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ = \;& 0.7619 \end{aligned}$$



7 Übungsaufgaben

1. Ein unverfälschter Würfel wird fünfmal geworfen. X sei die Anzahl der Würfe, bei denen eine Sechs erscheint.
   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens zwei Sechsen zu werfen?
   (b) Wie gross ist der Erwartungswert von X?
2. X sei eine binomialverteilte Zufallsgrösse mit $n = 10$ und $p = 0.25$.
   (a) Welche Werte kann X annehmen?
   (b) Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten, dass X einen dieser Werte annimmt?
   (c) Notieren Sie die Verteilung von X und kontrollieren Sie das Ergebnis mit Geogebra.
   (d) Wie gross ist der Erwartungswert und die Varianz von X?
   (e) Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P(X = 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X \geq 3)$, $P(X = 4|X \geq 3)$, $P(X = 4|X = 3)$ und $P(X \leq 3|X \geq 3)$.
   (f) Bestimmen Sie die exakte Wahrscheinlichkeit, dass X um höchstens 2 vom Erwartungswert abweicht.
3. Ein Angler fängt an einem kleinen Fischteich im Durchschnitt pro Stunde sechs Fische. Y bezeichne die Zahl der Fische, die in irgendeiner Stunde gefangen werden.
   (a) Welche Verteilung kann man Y zuordnen?
   (b) Bestimmen Sie $E(Y)$.
   (c) Wie gross sind $P(Y = 2)$ und $P(Y > 2)$?
4. In einem Land werden in einem Jahr $124'000$ Geburten registriert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb eines zufällig ausgewählten 5-Minuten-Intervalls zwei oder mehr Geburten stattfinden.
5. Aus den Zahlen 1 bis 49 werden beim Zahlenlotto sechs verschiedene ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler
   (a) sechs Richtige
   (b) genau fünf Richtige
   (c) keine Richtige
   (d) höchstens zwei Richtige hat?

Lösungen einiger Übungsaufgaben

1. $a)$ 0.1962 und $b)$ $\frac{5}{6}$

2. (f) 0.8656

3. $a)$ $Y \sim Po(6)$ $b)$ $E(Y) = 6$ $c)$ $P(Y = 2) = 0.0446$, $P(Y > 2) = 0.938$

4. X sei die Anzahl Geburten innerhalb eines (beliebigen) 5-Minuten-Intervalls eines Jahres (Poissonverteilung). $124'000$ wäre die Intensitätsrate für ein Jahr. Mit wievielen Geburten muss man dann in einem 5-Minuten-Intervall (im Durchschnitt) rechnen? Ein Jahr besteht aus $60 \cdot 24 \cdot 365 : 5 = 105'120$ (Stück) 5-Minuten-Intervallen. Die Intensitätsrate (pro 5-Minuten-Intervall) ist somit $\lambda = 124'000/105'120 \approx 1.18$. Dann gilt also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0.33$.

5. (a) $7.15 \cdot 10^{-8}$
   (b) $1.84 \cdot 10^{-5}$
   (c) 0.436
   (d) 0.981