Statistik
Dr. Thomas Zehrt

Ausblick

Motivation

Wir werfen einen Würfel 1000-mal und wir möchten die Wahrscheinlichkeit P bestimmen, dass zwischen 500- und 600-mal eine Sechs fällt. Natürlich können wir hier schnell ein Bernoulli-Experiment mit der (Einzel)erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ erkennen und es gilt

$$P = \sum_{k=500}^{600} \binom{1000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k}.$$

Und selbst mit dem Taschenrechner ist das Ergebnis weder leicht noch schnell zu bestimmen. Da aber die Binomialverteilung in der Praxis sehr häufig vorkommt, müssen wir versuchen, die Rechnung zu vereinfachen. Dabei helfen uns sogenannte Grenzwertsätze, die z.B. die obige Wahrscheinlichkeit (approximativ) als Flächeninhalte unter speziellen Funktionsgraphen ausdrücken.

Benötigtes Schulwissen

Für das Verständnis dises Kapitels wird der gesamte Maturastoff vorausgesetzt. Insbesondere sollte man sich mit Differentialrechnung, Kurvendiskussionen und Integralrechnung auskennen. Falls Sie also den Inhalt dieses Kapitels Schritt für Schritt nachvollziehen können, werden Sie auch die höheren Mathematikkurse vor keine (unlösbaren) Probleme stellen.

Erkennen Sie viele Lücken, sollten Sie in den Semesterferien dringend den Maturastoff in Mathematik wiederholen und am mathematischen Vorbereitungskurs teilnehmen.

Erfahrungsgemäss bereitet die Vorlesung *Mathematik 1* den Studierenden die grössten Probleme (Durchfallquote im FS 10: 56%), obwohl knapp die Hälfte der Vorlesung aus Maturastoff besteht!

Übungsaufgaben

Dieses Skript enthält keine Übungsaufgaben. Lösen Sie die Aufgaben im Skript und versuchen Sie insbesondere die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes sowie die Konstruktion der Zufallsvariablen im Kapitel Fundamentalbeispiel zu verstehen.

Auch dieses Skript ist **prüfungsrelevant**!

1 Die Gaußsche(n) Glockenkurve(n)

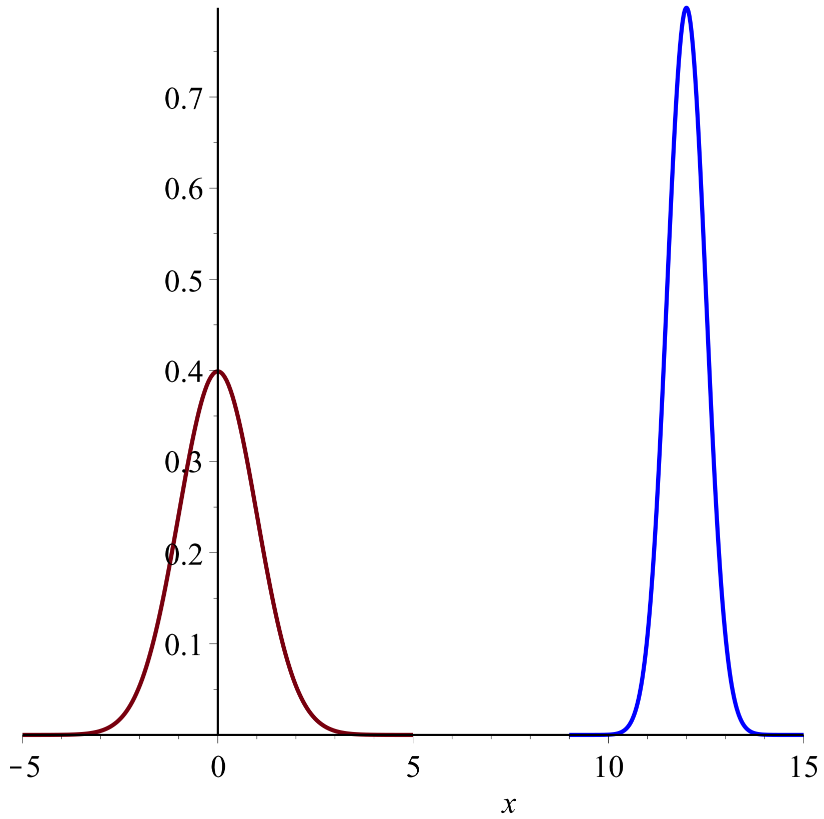
Seien zunächst μ und σ zwei reelle Zahlen mit $\sigma > 0$. Die Funktion

$$\phi(x; \mu, \sigma) \quad := \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ist auf der ganzen reellen x-Achse definierte und ihr Graph heisst Glockenkurve oder Gaußsche Glockenkurve. Ein wichtige Spezialfall ist die so genannte Standardglockenkurve $\mu = 0$ und $\sigma = 1$:

$$\phi(x) \;:=\; \phi(x; 0, 1) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

In der folgenden Skizze sehen Sie die Graphen von $\phi(x) = \phi(x; 0, 1)$ (rot) und $\phi(x; 12, 0.5)$ (blau).



1.1 Eigenschaften von $\phi(x) \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$

1. $\phi(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn Exp.-funktionen nehmen nur positive Werte an.
2. Der Graph von ϕ ist symmetrisch zur y-Achse, denn $\phi(-x) = \phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. $\phi(x)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x = 0$, denn (mit der Kettenregel)
$$0 \;=\; \phi'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(-\frac{1}{2}\cdot 2x\right) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
falls $x = 0$ und (mit Produkt- und Kettenregel)
$$\phi''(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}x^2} - x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\right] \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, [1 - x^2]$$
$$\phi''(0) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;<\; 0.$$
4. Die beiden einzigen Wendestellen von ϕ sind 1 und -1, denn
$$0 \;=\; \phi''(x) \;=\; -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, [1 - x^2]$$
gilt falls $1 - x^2 = 0$ also für $x = 1$ oder $x = -1$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \;=\; \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{e^{\frac{1}{2}x^2}} \;=\; \frac{1}{\infty} \;=\; 0.$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx \;=\; 1.$
Diese Eigenschaft wollen (und können) wir hier nicht beweisen. Sie bedeutet, dass die Fläche die man zwischen dem (gesamten) Graphen der Glockenkurve und der (gesamten) x-Achse erahnen kann, den Flächeninhalt von genau 1 besitzt.
7. Die Funktion ϕ ist nicht elementar integrierbar, d.h. dass sie zwar eine Stammfunktion besitzt, dass man diese aber nicht aus den elementaren Funktionen (Polynome, rationale Funktionen, $e^x, \log(x), \sin(x), \cos(x), \ldots$) zusammensetzen kann. Deshalb schreiben wir einfach für eine Stammfunktion von $\phi(x)$:
$$\Phi(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\, dt \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

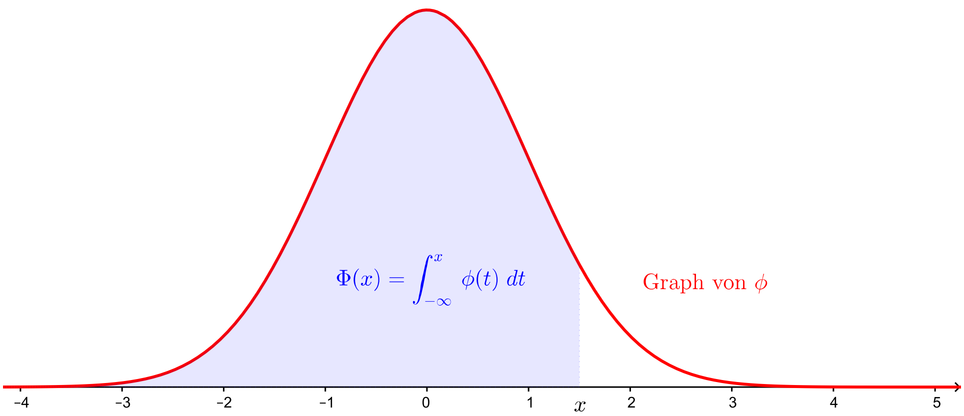
Aufgabe 1.1 *Skizzieren Sie den Graphen von ϕ. Wo könnte man die Werte von Φ ablesen? Zeichnen Sie in der Skizze des Graphen von ϕ die Funktionswerte $\Phi(1/2)$ und $\Phi(-2)$ ein.*

8. **Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:**

$$\boxed{\Phi(x) = \textbf{Flächeninhalt links von } x \textbf{ zwischen } x\textbf{-Achse und Graph von } \phi}$$

Da die Funktion ϕ symmetrisch zur y-Achse ist (für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt die Relation $\phi(x) = \phi(-x)$), gilt auch:

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 1/2 \\ \Phi(-x) &= 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$



Wegen der grossen praktischen Bedeutung der Funktion $\Phi(x)$ wurden die Funktionswerte früher (und zum Teil auch heute noch) in Tafelwerken zusammengestellt.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.866	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999

Aufgabe 1.2

(a) *Berechnen Sie* $\Phi(1.83)$ *und* $\Phi(-1.5)$.

(b) *Bestimmen Sie* x*, so dass* $\Phi(x) = 0.962$.

9. Natürlich gilt:

$$\int_a^b \phi(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^b \phi(t)\,dt - \int_{-\infty}^a \phi(t)\,dt \;=\; \Phi(b) - \Phi(a).$$

Aufgabe 1.3 *Berechnen Sie* $\int_{-1}^{1} \phi(t)\,dt$, $\int_{-2}^{2} \phi(t)\,dt$, $\int_{-1}^{0.5} \phi(t)\,dt$ *und* $\int_{2}^{2.9} \phi(t)\,dt$.

1.2 Eigenschaften von $\phi(x;\mu,\sigma)$

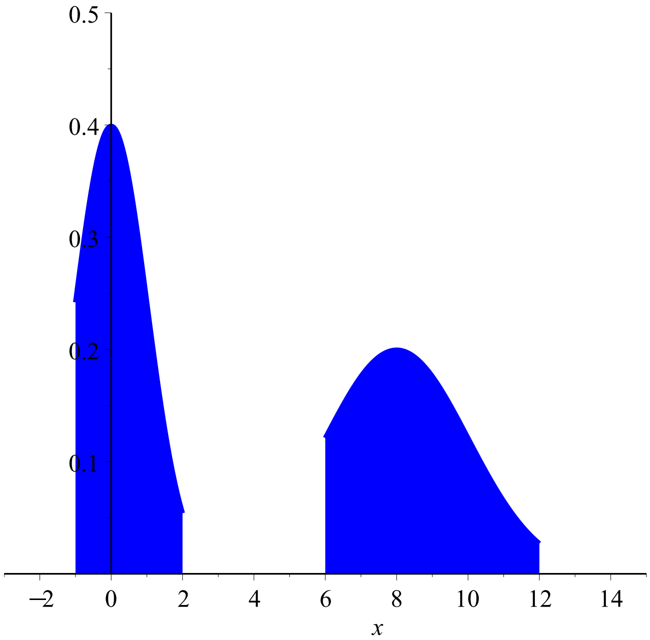
1. $\phi(x;\mu,\sigma) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. $\phi(x;\mu,\sigma)$ ist symmetrisch bezüglich der Geraden $x = \mu$, d.h. es gilt
$$\phi(\mu + t) \quad = \quad \phi(\mu - t)$$
für alle reellen Zahlen t.
3. $\phi(x;\mu,\sigma)$ hat ein lokales Maximum an der Stelle $x = \mu$ und sonst keine weiteren lokalen Extremalstellen und keine Sattelpunkte.
4. Die einzigen beiden Wendestellen von $\phi(x;\mu,\sigma)$ sind $\mu + \sigma$ und $\mu - \sigma$.
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \phi(x;\mu,\sigma) = 0$
6. Keine der Funktionen $\phi(x;\mu,\sigma)$ ist elementar integrierbar. Deshalb schreiben wir einfach für eine Stammfunktion von $\phi(x;\mu,\sigma)$:
$$\Phi(x;\mu,\sigma) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \phi(t;\mu,\sigma)\,dt \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$
Beachten Sie, dass $\Phi(x;\mu,\sigma)$ der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von $\phi(x;\mu,\sigma)$ und der x-Achse links vom Punkt x ist.
7. Durch Substitution kann man zeigen, dass sich die Fläche unter irgendeiner Glockenkurve als Fläche unter der Standardglockenkurve darstellen lässt.

$$\boxed{\Phi(b;\mu,\sigma) - \Phi(a;\mu,\sigma) \;=\; \int_a^b \phi(x;\mu,\sigma)\,dx \;=\; \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \phi(x)\,dx \;=\; \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

Beweis: Wir wählen die Substitution $u = u(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$ und damit $du = \frac{1}{\sigma}\,dx$ und erhalten damit schrittweise:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \phi(x;\mu,\sigma)\,dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du \\
&= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx}_{=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,}_{=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.1



$$\int_{6}^{12} \phi(x;8,2)\,dx = \int_{\frac{6-8}{2}}^{\frac{12-8}{2}} \phi(x;0,1)\,dx = \int_{-1}^{2} \phi(x)\,dx = \Phi(2) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(2) - (1 - \Phi(1))$$
$$= 0.977 - (1 - 0.841)$$

8. Die folgenden Integrale sind unabhängig von der konkreten Wahl der Parameter μ und σ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x;\mu,\sigma)\,dx = 1$$
$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \phi(x;\mu,\sigma)\,dx = 0.683$$
$$\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \phi(x;\mu,\sigma)\,dx = 0.955$$
$$\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} \phi(x;\mu,\sigma)\,dx = 0.997$$

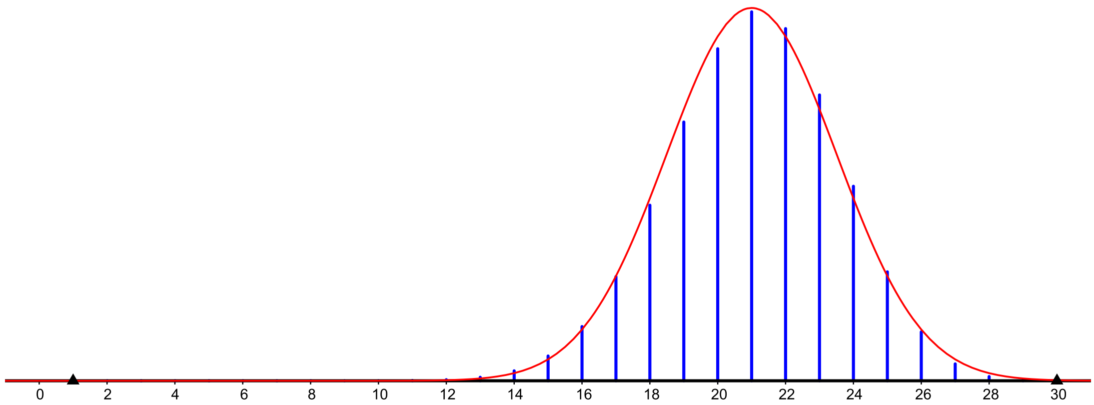
oder anders ausgedrückt: 68.3% (bzw. 95.5% oder 99.7%) der Gesamtfläche unter $\phi(x;\mu,\sigma)$ liegen zwischen den Grenzen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$ ($\mu - 2\sigma$ und $\mu + 2\sigma$ oder $\mu - 3\sigma$ und $\mu + 3\sigma$)

2 Der zentrale Grenzwertsatz

2.1 Einführung

In diesem Abschnitt wollen wir uns einer wichtigen Klasse von (diskreten) Zufallsvariablen zuwenden, den so genannten angenähert normalverteilten Zufallsvariablen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten solcher Zufallsvariablen lassen sich dann, wie der Name schon sagt, elegant durch die Funktion Φ schätzen.

Das typische Bild einer solchen Zufallsvariablen sieht wie folgt aus:



Das gesamte Stabdiagramm der (diskreten) Verteilung passt (recht) gut zu einer geschickt gewählten Funktion $\phi(x; \mu, \sigma)$.

Sehr viele Merkmale in der realen Welt können als **additive Überlagerung von kleinen unabhängigen Effekten** verstanden werden.

Beispiel 2.1 *Intelligenzquotienten = Gene + Eltern + Geschwister + Schule + Lehrer + Ernährung + wie lange man als Säugling einen Schnuller hatte + ...*

Der zentrale Grenzwertsatz behauptet, dass solche Merkmale angenähert normalverteilt sein müssen. Somit gibt der zentrale Grenzwertsatz auch den wesentlichen Grund für die herausragende Wichtigkeit der Funktionen ϕ und Φ an.

2.2 Standardisierung

Definition 2.1 *Eine Zufallsvariable heisst standardisiert, wenn sie den Erwartungswert* 0 *und die Varianz* 1 *hat. Sei X eine Zufallsvariable. Dann heisst die Zufallsvariable*

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

Standardisierung von X.

Beispiel 2.2 *Sei $X \sim B(2, 1/3)$, d.h. die Verteilung von X ist gegeben durch:*

0	1	2
$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

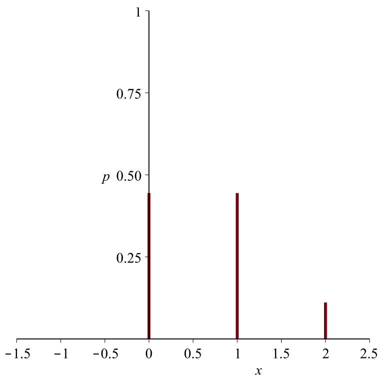
Es gilt: $E(X) = n \cdot p = \frac{2}{3}$, $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{4}{9}$ und $\sqrt{Var(X)} = \frac{2}{3}$. Die Standardisierung von X ist somit

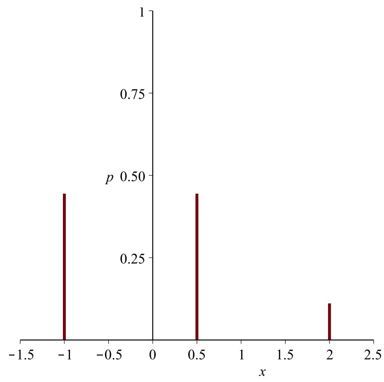
$$Z = \frac{X - 2/3}{2/3}$$

und hat die Verteilung:

$\frac{0-2/3}{2/3} = -1$	$\frac{1-2/3}{2/3} = \frac{1}{2}$	$\frac{2-2/3}{2/3} = 2$
$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Links sehen Sie die Verteilung von X und rechts die Verteilung der Standardisierung von X. Die drei Wahrscheinlichkeiten sind unverändert. Aber die Positionen der Wahrscheinlichkeiten habe sich so verändert, dass einerseits der Erwartungswert (Schwerpunkt) die 0 *ist und andererseits die Varianz (Streuung) gleich* 1*. Man könnte sagen, dass sich die Verteilung* **qualitativ nicht** *verändert hat.*





2.3 Formulierung des zentralen Grenzwertsatzes

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine (unendliche) Folge von identisch verteilten und unabhängigen Zufallsvariablen, die alle den selben Erwartungswert $e = E(X_i)$ und die selbe Varianz $v = Var(X_i)$ haben. Wir betrachten die neuen Zufallsvariablen

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i \;=\; X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Für den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von S_n ergibt sich nach direkter Rechnung:

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \cdot e \\ Var(S_n) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \cdot v \\ \sigma(S_n) &= \sqrt{n \cdot v} \end{aligned}$$

Diese Zufallsvariablen werden nun standardisiert:

$$Y_n \;=\; \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \;=\; \frac{S_n - n \cdot e}{\sqrt{n \cdot v}}.$$

Satz 1 (Zentraler Grenzwertsatz)

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P(Y_n \leq x) \;=\; \Phi(x)}$$

Etwas grob formuliert bedeutet das: Lässt sich eine zufällige Erscheinung additiv aus vielen (kleinen) unabhängigen zufälligen Ereignissen zusammensetzen, so können Wahrscheinlichkeiten der zufälligen Erscheinung **näherungsweise** mit der Funktion Φ bestimmt werden.

Y_n ist also (angenähert) standardnormalverteilt.

2.4 Fundamentalbeispiel

Experiment: n-maliger Münzwurf

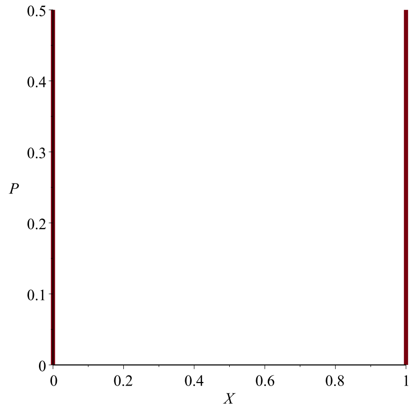
Dann gilt $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \ : \ \omega_i \in \{K, Z\}\}$ mit der Gleichverteilung. Sei

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{beim } i\text{-ten Wurf Kopf} \\ 1 & \text{beim } i\text{-ten Wurf Zahl} \end{cases}$$

Alle diese Zufallsvariablen sind unabhängig und gleichverteilt; es gilt $E(X_i) = \frac{1}{2}$ und $Var(X_i) = \frac{1}{4}$. Genauer gesagt, ist jedes X_i zweipunktverteilt $\left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

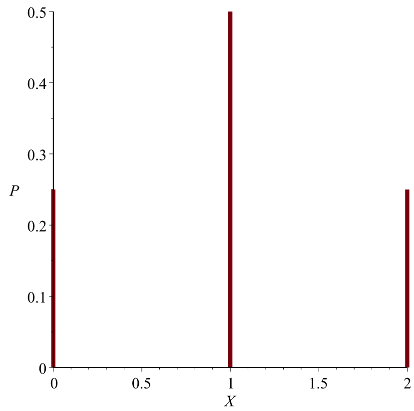
Nun addieren wir die Zufallsvariablen:

- $S_1 = X_1$, Verteilung: $\left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$



- $S_2 = X_1 + X_2$, Verteilung: $\left\{\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{2}{4}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right)\right\}$ bzw. genauer

$$S_2 = X_1 + X_2 = \begin{cases} 0 = 0 + 0 & P(S_2 = 0) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4 \\ 1 = 0 + 1 = 1 + 0 & P(S_2 = 1) = (1/2) \cdot (1/2) + (1/2) \cdot (1/2) = 2/4 \\ 2 = 1 + 1 & P(S_2 = 2) = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4 \end{cases}$$

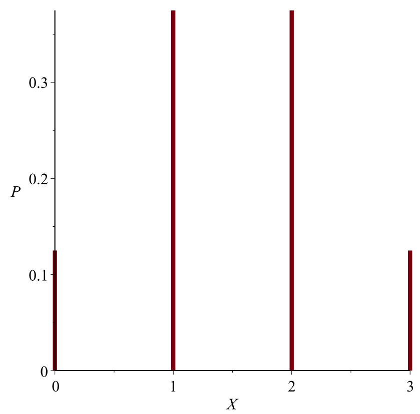


- $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$, Verteilung: $\left\{ \left(0, \frac{1}{8}\right), \left(1, \frac{3}{8}\right), \left(2, \frac{3}{8}\right), \left(3, \frac{1}{8}\right) \right\}$ bzw. genauer

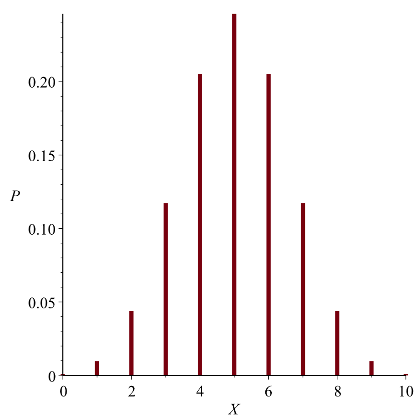
$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 = \begin{cases} 0 = 0+0+0 & P(S_3 = 0) = (1/2)^3 \\ 1 = 0+0+1 = 0+1+0 = 1+0+0 & P(S_3 = 1) = 3 \cdot (1/2)^3 \\ 2 = 0+1+1 = 1+0+1 = 1+1+0 & P(S_3 = 2) = 3 \cdot (1/2)^3 \\ 3 = 1+1+1 & P(S_3 = 3) = (1/2)^3 \end{cases}$$

und jede auftretende Wahrscheinlichkeiten erhält man nach direkter Rechnung, beispielsweise gilt:

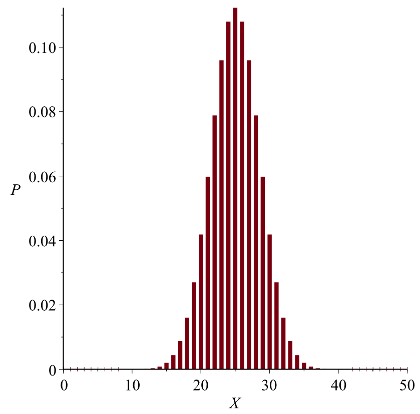
$$\begin{aligned} P(S_3 = 1) &= \quad P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 1) \\ &\quad + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 0) \\ &\quad + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 0) \\ \\ &= \quad P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 1) \\ &\quad + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) \cdot P(X_3 = 0) \\ &\quad + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0) \cdot P(X_3 = 0) \end{aligned}$$



- $S_{10} = X_1 + \ldots + X_{10}$, Verteilung: $\left\{ \left(0, \frac{1}{2^{10}}\right), \left(1, \frac{10}{2^{10}}\right), \ldots, \left(10, \frac{1}{2^{10}}\right) \right\}$



- $S_{50} = X_1 + \ldots + X_{50}$, Verteilung:



Lemma 1 *Die Verteilung für* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *ist gegeben durch*

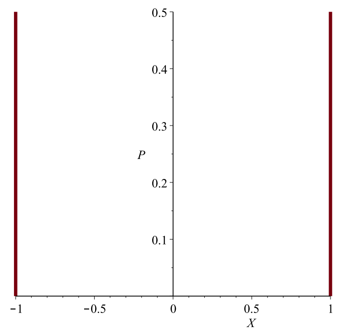
$$\left\{ \left(0, \frac{1}{2^n}\right), \left(1, \frac{n}{2^n}\right), \ldots, \left(k, \frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right), \ldots, \left(n, \frac{1}{2^n}\right) \right\}$$

Beweis:

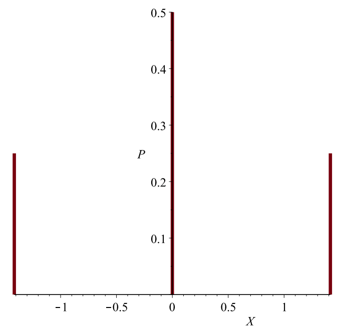
Nun betrachten wir die zugehörigen normalisierten Zufallsvariablen:

$$Y_n \quad = \quad \frac{S_n - n\frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}$$

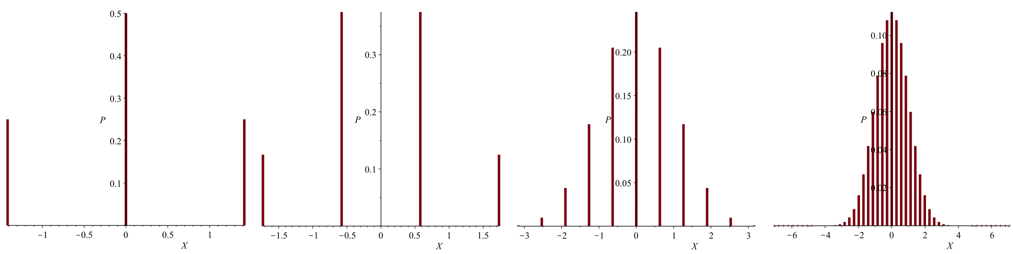
- Y_1, Verteilung: $\left\{\left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$



- Y_2, Verteilung: $\left\{\left(-\sqrt{2}, \frac{1}{4}\right), \left(0, \frac{2}{4}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\right)\right\}$



- usw.



Lemma 2 *Die Verteilung der Zufallsvariablen* $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}$ *ist gegeben durch*

$$\left\{\left(\frac{0 - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}, \frac{1}{2^n}\right), \ldots, \left(\frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}, \frac{\binom{n}{k}}{2^n}\right), \ldots, \left(\frac{n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2}}, \frac{1}{2^n}\right)\right\}$$

und für $n \to \infty$ *gilt* $Y_n \sim N(0, 1)$

3 Grenzwertsatz und Binomialverteilung

Sei X binomialverteilt, d.h. $X \sim B(n;p)$ oder

$$P(X = x) \;=\; f_{Bi}(x;n,p) \;=\; \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}$$

Die Zufallsvariable X gibt also an, wie oft in der n-fachen unabhängigen Wiederholung eines Einzelexperimentes ein Ereignis E (welches jeweils mit der konstanten Einzelwahrscheinlichkeit p eintrifft) eingetreten ist. Daher kann X als Summe

$$X \;=\; \sum_{i=1}^{n} X_i$$

unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen X_i darstellt werden mit:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{beim } i\text{-ten Versuch } E \\ 0 & \text{beim } i\text{-ten Versuch } E^c \end{cases}$$

Auf X kann der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden. Wir wissen, dass

- $\mu = np$ (Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen) und
- $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ (Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariablen)

und es folgt zunächst:

$$\lim_{n\to\infty} P(X \le x) \;=\; \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \;=\; \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Diese Aussage, zusammen mit einer kleinen Korrektur um 0.5 an den Rändern, gibt uns eine Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten von binomialverteilten Zufallsvariablen angenähert zu bestimmen.

Satz 2 (Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace) *Sei $X \sim B(n;p)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable, $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Dann gilt*

$$\boxed{\begin{aligned} f_{Bi}(x;n,p) \;&=\; \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x} \;\approx\; \phi\left(x; np, \sqrt{np(1-p)}\right) \\ P(a \le X \le b) \;&=\; \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x} \;\approx\; \Phi\left(\frac{b-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu-0.5}{\sigma}\right) \end{aligned}}$$

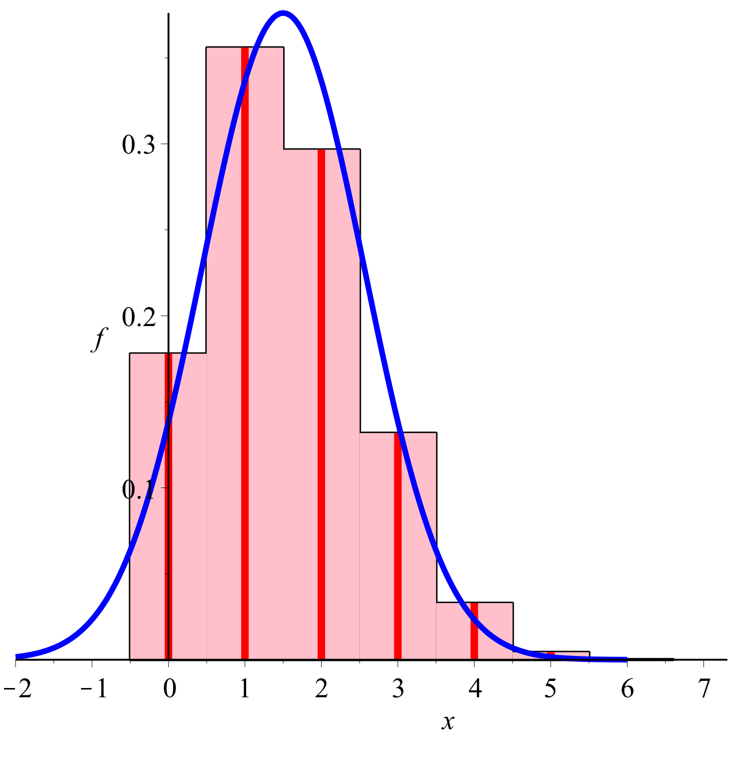
mit hinreichender Genauigkeit, falls $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ gilt.

Bemerkung 3.1 *Es ist auf den ersten Blick etwas seltsam, denn in der zweiten Formel des lokalen Grenzwertsatzes werden Summen von Streckenlängen (linke Seite) mit dem Flächeninhalt unter einer Kurve verglichen. Hier scheinen die Dimensionen nicht zu passen.*

Um uns das besser vorstellen zu können stellen wir die Binomialverteilung $f_{Bi}(x; n, p)$ in einem Koordinatensystem als Treppenfunktion in folgender Weise dar: Für jedes x mit $0 \leq x \leq n$ zeichnen wir (anstelle eines Stabes der Länge $f_{Bi}(x; n, p)$ über x) ein Rechteck mit den Eckpunkten

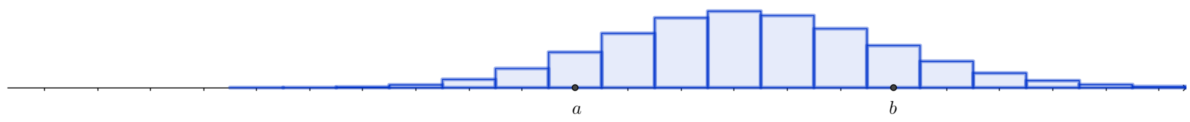
$$\left(x - \frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(x + \frac{1}{2}, 0\right), \quad \left(x - \frac{1}{2}, f_{Bi}(x; n, p)\right), \quad \left(x + \frac{1}{2}, f_{Bi}(x; n, p)\right)$$

in das Koordinatensystem. Da das Rechteck die Grundseitenänge 1 und die Höhe $f_{Bi}(x; n, p)$ hat ist der Flächeninhalt genau $f_{Bi}(x; n, p)$, d.h. der Flächeninhalt des Rechtecks über x kann als die zu x gehörende Wahrscheinlichkeit $f_{Bi}(x; n, p)$ angesehen werden. Jetzt kann man Flächen mit Flächen vergleichen! Eventuell kann man sogar erkennen, warum man die Integrationsgrenzen im Grenzwertsatz um $1/2$ modifiziert?

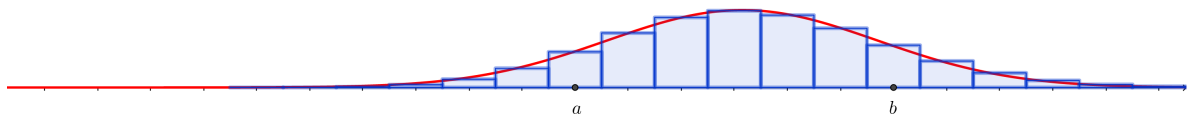


Bemerkung 3.2

- *Die Ausgangsfrage ist also, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine binomialverteilte Zufallsvariable* $X \sim B(n,p)$ *einen Wert zwischen* a *und* b *annimmt. Natürlich gilt* $E(X) = np$ *und* $Var(X) = np(1-p)$*. Wir interessieren uns also für die Wahrscheinlichkeit* P *(Rechtecksflächeninhalt) zwischen* a *und* b*, also* $P = P(a \leq X \leq b)$.



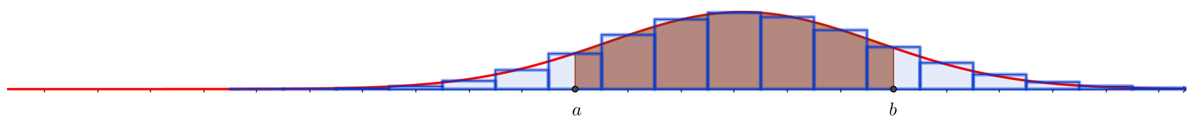
- *Wir approximieren die Binomialverteilung durch die Gauss-Glockenkurve* $\phi\left(x; np, \sqrt{np(1-p)}\right)$.



- *Wir glauben, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit dem Flächeninhalt unter der speziell gewählten Gauss-Glocke recht gut entspricht.*

$$P \approx \int_a^b \phi\left(x; np, \sqrt{np(1-p)}\right)\, dx$$

Eventuell könnte man hier auch ahnen, dass es besser wäre, von $a - 0.5$ *bis* $b + 0.5$ *zu integrieren, denn in diesem Fall messen wir die beiden Rechtecke, die in den Punkten* a *und* b *sitzen, komplett mit. Also nicht nur eine Hälfte.*

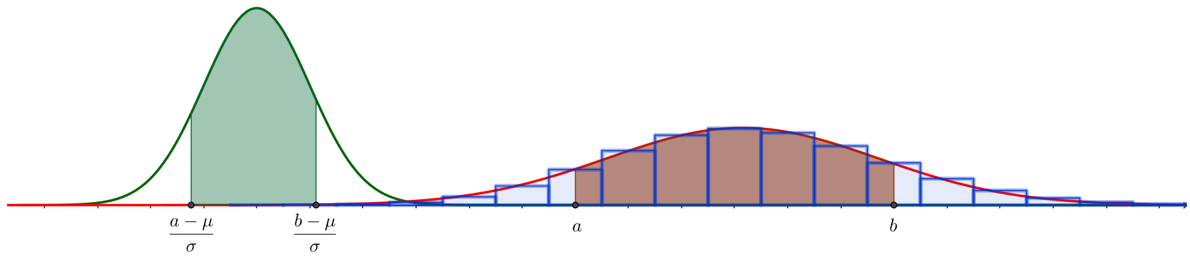


- *Wir transformieren die Grenzen* $a \to \frac{a-\mu}{\sigma}$ *und* $b \to \frac{b-\mu}{\sigma}$ *so, dass man den gesuchten Flächeninhalt unter der Standardglockenkurve zwischen den transformierten Grenzen finden kann und berechnen diesen mit der Formelsammlung.*

$$P \approx \int_a^b \phi\left(x; np, \sqrt{np(1-p)}\right)\, dx = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \phi(x)\, dx = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

bzw.

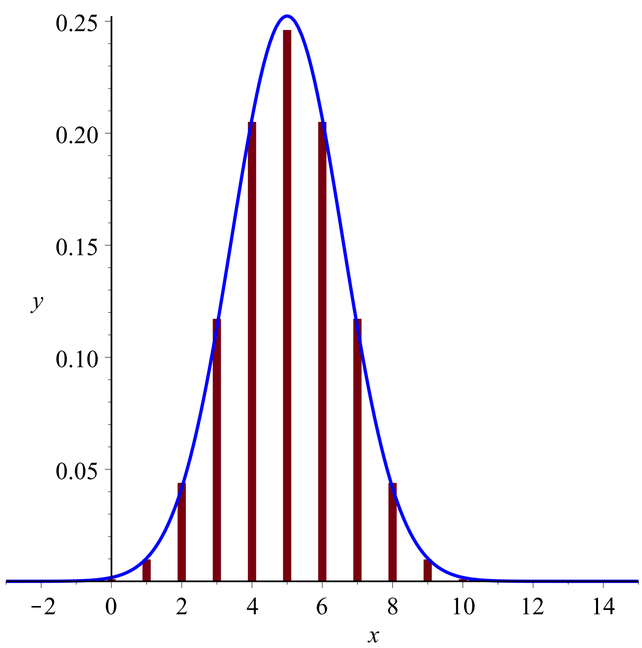
$$P \approx \int_{\frac{a-\mu-0.5}{\sigma}}^{\frac{b-\mu+0.5}{\sigma}} \phi(x)\, dx = \Phi\left(\frac{b-\mu+0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu-0.5}{\sigma}\right).$$



Beispiel 3.1 *Wir wollen für* $n = 10$ *und* $p = 0.5$ *bzw.* $p = 0.25$ *jeweils* f_{Bi} *mit* ϕ *vergleichen.*

1. $n = 10$ *und* $p = 0.5 \quad \longrightarrow \quad \mu = n \cdot p = 5$ *und* $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 1.58$

   In der Skizze sehen Sie die Binomialverteilung $f_{Bi}(x; 10, 0.5)$ *(als rotes Stabdiagramm) und die (blaue) Glockenkurve* $\phi(x; 5, 1.58)$*:*

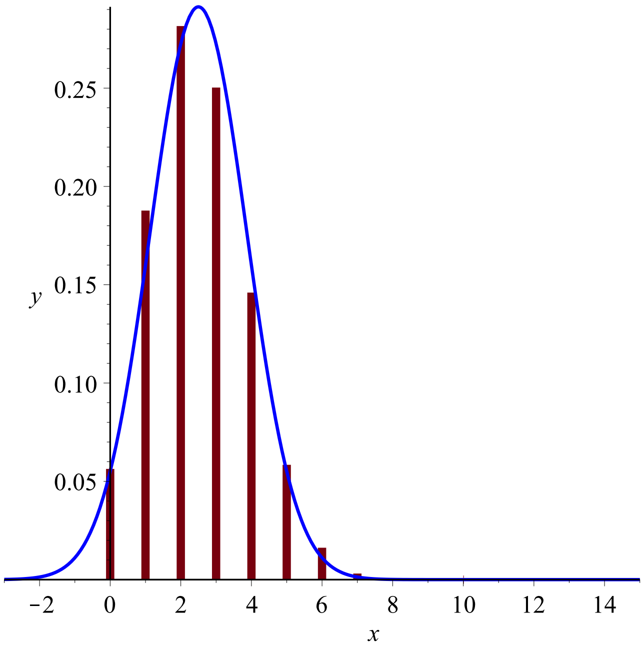


Zum Vergleich hier die numerischen Werte der beiden Funktionen $f_{Bi}(x; 10, 0.5)$ *und* $\phi(x; 5, 1.58)$ *für* $x = 0, 1, \ldots, 10$ *(berechnet mit Geogebra):*

x	$\binom{10}{x} 0.5^x\, 0.5^{10-x}$	$\frac{1}{1.58\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{1.58}\right)^2}$
0	0.0010	0.0000
1	0.0098	0.0100
2	0.0439	0.0400
3	0.1172	0.1100
4	0.2051	0.2100
5	0.2461	0.2500
6	0.2051	0.2100
7	0.1172	0.1100
8	0.0439	0.0400
9	0.0098	0.0100
10	0.0010	0.0000

2. $n = 10$ *und* $p = 0.25 \quad \longrightarrow \quad \mu = n \cdot p = 2.5$ *und* $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 1.37$

   In der Skizze sehen Sie die Binomialverteilung $f_{Bi}(x; 10, 0.25)$ *(als rotes Stabdiagramm) und die (blaue) Glockenkurve* $\phi(x; 2.5, 1.37)$*:*



Es ist klar, dass die Approximation hier nicht so gut ausfallen kann wie im obigen Beispiel. Jede Glockenkurve ist symmetrisch zur Geraden $x = \mu$*, aber eine Binomialverteilung ist nur dann symmetrisch zur Geraden* $x = \mu = np$*, wenn* $p = 0.5$ *ist!*

Aufgabe 3.1 *Bestimmen Sie approximativ die Zahl*

$$P \quad = \quad \sum_{k=100}^{160} \binom{1000}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k}.$$

Lösung: (Das exakte Ergebnis ist $P \approx 0.3028$. Mit dem Grenzwertsatz sollte man $P \approx 0.3020$ erhalten.)