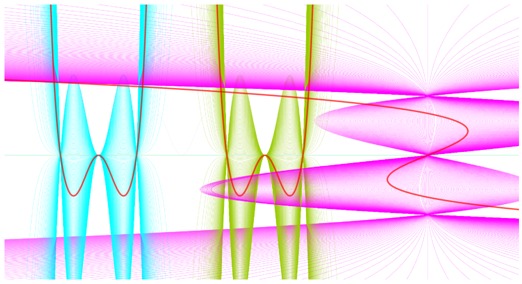
Universität Basel

Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum

Abteilung Quantitative Methoden

Dr. Thomas Zehrt



Formelsammlung für die Prüfungen

- **Statistik**,
- **Mathematik 1** und
- **Mathematik 2**

1 Eindimensionale Häufigkeitsverteilung

Unklassiert

Statistische Masse: $\{1, 2, \ldots, n\}$

x_i = Ausprägung des Merkmals X bei Element i

m ($\leq n$) die Anzahl der verschiedenen Merkmalsausprägungen von X

$$\begin{aligned} a_j &= j\text{-te Ausprägung des Merkmals } X, \\ h_j &= \text{ Anzahl der } x_i \text{ mit der Ausprägung } a_j \text{ (}\underline{\text{absolute Häufigkeit}}\text{)} \\ f_j &= \frac{h_j}{n} \text{ (}\underline{\text{relative Häufigkeit}}\text{).} \end{aligned}$$

Klassiert

X stetiges Merkmal mit Werten in $[a, b)$ und $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b$

$$\begin{aligned} K_j &= [a_j, a_{j+1}) \\ h_j &= \text{ Anzahl der Ausprägungen } x \text{ mit } x \in K_j = [a_j, a_{j+1}) \\ f_j &= \frac{h_j}{n} \\ d_j &= a_{j+1} - a_j \text{ (}\underline{\text{Klassenbreite}}\text{)} \\ m_j &= a_j + \frac{d_j}{2} = \frac{a_{j+1} + a_j}{2} \text{ (}\underline{\text{Klassenmitte}}\text{)} \\ h_j^* &= \frac{h_j}{d_j} \text{ (}\underline{\text{Klassendichte}}\text{).} \end{aligned}$$

2 Mittelwerte und (empirische) Varianz

x_i: Ausprägung von X beim Element i und $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ die geordneten Merkmalsausprägungen

Arithmetisches Mittel $\quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Gewichtetes arithmetisches Mittel $\quad \bar{x}_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{n} p_i \, x_i \quad$ **p** Wahrscheinlichkeitsvektor

Geometrisches Mittel $\quad G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad$ alle x_i positiv

(empirische) Varianz $\quad var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

p-Quantil für $0 \leq p \leq 1$

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls } n \cdot p \notin \mathbb{Z} \text{ ist } k \text{ die kleinste ganze Zahl mit } k > n \cdot p \\ \frac{1}{2}(x_{(n \cdot p)} + x_{(n \cdot p + 1)}) & \text{falls } n \cdot p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3 Lorenzkurve und Ginikoeffizient

Merkmalsausprägungen, der Grösse nach geordnet: $0 \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$.

$$u_i = \frac{i}{n} \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{sowie} \quad v_0 = 0$$

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} x_{(j)}} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

Die <u>Lorenzkurve</u> ist der Streckenzug, der durch die Punkte $(u_0, v_0), (u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ verläuft.

Der <u>Ginikoeffizient</u> G ist definiert durch $G = 2 \cdot F$, wobei F die Fläche zwischen der Diagonalen und der Lorenzkurve ist. Für den Ginikoeffizienten G gilt:

$$G = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_{(i)} - (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}}{n\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}} = 1 - \frac{1}{n}\left(2\sum_{i=1}^{n-1} v_i + 1\right)$$

4 Zweidimensionale Häufigkeitsverteilung

Seien $a_1, \ldots, a_l$ die Ausprägungen von X und $b_1, \ldots, b_m$ die Ausprägungen von Y:

		Y						Vert. von X
		b_1	b_2	$\ldots$	b_k	$\ldots$	b_m	
	a_1	h_{11}	h_{12}	$\ldots$	h_{1k}	$\ldots$	h_{1m}	$h_{1\bullet}$
	a_2	h_{21}	h_{22}	$\ldots$	h_{2k}	$\ldots$	h_{2m}	$h_{2\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
X	a_j	h_{j1}	h_{j2}	$\ldots$	h_{jk}	$\ldots$	h_{jm}	$h_{j\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
	a_l	h_{l1}	h_{l2}	$\ldots$	h_{lk}	$\ldots$	h_{lm}	$h_{l\bullet}$
Vert. von Y		$h_{\bullet 1}$	$h_{\bullet 2}$	$\ldots$	$h_{\bullet k}$	$\ldots$	$h_{\bullet m}$	n

- h_{jk} = Anzahl Elemente mit $(X = a_j)$ und $(Y = b_k)$
- $h_{j\bullet}$ = Anzahl Elemente mit $(X = a_j)$
- $h_{\bullet k}$ = Anzahl Elemente mit $(Y = b_k)$

5 Zusammenhänge

Zusammenhang zw. metrischskalierten Merkmalen

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ Wertepaare

$$\begin{array}{lrcl} \text{(empirische) Kovarianz:} & cov(X,Y) & = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \\[2ex] \text{(empirischer) Korrelationskoeffizient:} & kor(X,Y) & = & \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\cdot\sqrt{var(Y)}} \end{array}$$

Der Korrelationskoeffizient $kor(X, Y)$ kann nur Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Weiterhin gilt:

$$\begin{array}{lcll} kor(X,Y)=+1 & \Longleftrightarrow & y_i = ax_i+b & \text{mit } a>0 \\ kor(X,Y)=-1 & \Longleftrightarrow & y_i = ax_i+b & \text{mit } a<0. \end{array}$$

Zusammenhang zw. ordinalskalierten Merkmalen

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ Wertepaare

R_i bzw. R'_i Rangzahlen bezüglich $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bzw. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Rangkorrelationskoeffizient (von Spearmann) ohne Bindung:

$$R = R(X,Y) \;=\; 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(R_i - R'_i)^2}{n(n^2-1)}.$$

Zusammenhang zw. nominalskalierten Merkmalen

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ Wertepaare

Chi-Quadrat-Koeffizient:

$$\chi^2 \;= \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(h_{jk} - \frac{h_{j\bullet}\cdot h_{\bullet k}}{n}\right)^2}{\frac{h_{j\bullet}\cdot h_{\bullet k}}{n}}.$$

normierte Kontingenzkoeffizient:

$$K_{korr} \;=\; \frac{K}{K_{max}} \qquad \text{mit} \qquad K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}} \qquad \text{und} \qquad K_{max} \;=\; \sqrt{\frac{\min(l,m)-1}{\min(l,m)}}$$

6 Regressionsrechnung

Allgemein

gegeben: Modellgleichung $y = f(x; a, b, c, \dots)$ zwischen den Merkmalen X und Y und n Messwertpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

gesucht: Welche Modellkurve approximiert die Messwertpaare am besten?

Methode der kleinsten Quadrate: Bestimme die $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \dots$, die die Straffunktion S minimieren:

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^{n} (\ y_i - f(x_i; a, b, c, \dots)\ )^2$$

Lineare Regression

Regressionsgerade: $\hat{y} = f(x) = \hat{a}x + \hat{b}$

Lösung:

- $$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ = \ \hat{a} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \hat{b} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i \ = \ \hat{a} \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{b}n$$
- oder
$$\hat{a} = \frac{cov(X, Y)}{var(X)} \qquad \text{und} \qquad \hat{b} = \bar{y} - \frac{cov(X, Y)}{var(X)}\,\bar{x}.$$

7 Zeitreihen

Additives Zeitreihenmodell

$$y(t_i) \ = \ G(t_i) + S(t_i) + R(t_i) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots$$

mit der glatten Komponente G, der Saisonkomponente S und der regulären Komponente R.

Trendbereinigte Zeitreihe

$$y^*(t_i) \ = \ y(t_i) - \hat{G}(t_i)$$

Zyklische Komponente

n sei die Anzahl der Beobachtungen, k die Zykluslänge und $m = \dfrac{n}{k}$

$$\hat{S}(t_i) \ = \ \hat{S}(t_{i+k}) \ = \ \hat{S}(t_{i+2\cdot k}) \ = \ \dots \ = \ \hat{S}(t_{i+(m-1)\cdot k}) \ = \ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} y^*(t_{i+j\cdot k})$$

8 Kombinatorik

Ziehung von n Kugeln aus einer Urne mit N Kugeln $\{1,\ldots,N\}$	Kardinalität des Raumes
in Reihenfolge mit Zurücklegen	$\lvert\Omega_I\rvert = N^n$
in Reihenfolge ohne Zurücklegen	$\lvert\Omega_{II}\rvert = N\cdot(N-1)\cdots(N-n+1) = \binom{N}{n}n! = \frac{N!}{(N-n)!}$
ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen	$\lvert\Omega_{III}\rvert = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$
ohne Reihenfolge mit Zurücklegen	$\lvert\Omega_{IV}\rvert = \binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!}{(N-1)!\,n!}$

9 Wahrscheinlichkeitsräume (Ω, P)

Grundlegende Eigenschaften

$$
\begin{array}{lcll}
P(\Omega) & = & 1 & \\
P(A) & \geq & 0 & \text{für alle } A\subset\Omega \\
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) & = & \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) & A_1, A_2, \ldots \text{ paarweise unvereinbare Ereignisse}
\end{array}
$$

Folgerungen

$$
\begin{array}{lcll}
P(A^c) & = & 1 - P(A) & \\
P(A\cup B) & = & P(A) + P(B) - P(A\cap B) & \\
P(A) & = & \sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i) & \{B_i\} \text{ vollständige Zerlegung von } \Omega
\end{array}
$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

$$
\begin{array}{lcll}
P(A\cap B) & = & P(A)\cdot P(B|A) \;=\; P(B)\cdot P(A|B) & \text{allgemein} \\
P(A\cap B) & = & P(A)\cdot P(B) & \text{falls } A, B \text{ \underline{unabhängig} sind} \\
P(A) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A|B_i) & \{B_i\} \text{ vollständige Zerlegung von } \Omega \\
P(B_k|A) & = & \dfrac{P(B_k)\cdot P(A|B_k)}{P(A)} & \{B_i\} \text{ vollständige Zerlegung von } \Omega
\end{array}
$$

10 Zufallsvariablen X

Rechenregeln für Verteilungsfunktionen $F(x) = P(X \leq x)$

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt:

$$
\begin{aligned}
P(X < a) &= P(X \leq a) - P(X = a) \;=\; F(a) - P(X = a)\\
P(X > a) &= 1 - F(a)\\
P(X \geq a) &= 1 - F(a) + P(X = a)\\
P(a < X \leq b) &= F(b) - F(a)\\
P(a < X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b)\\
P(a \leq X < b) &= F(b) - F(a) - P(X = b) + P(X = a)
\end{aligned}
$$

Diskrete Zufallsvariablen

Wertebereich	$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$
Verteilungsfunktion	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$
Erwartungswert	$\mu = E(X) = \sum_{x_i} x_i \; P(X = x_i)$
Varianz	$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 \; P(X = x_i)$

Stetige Zufallsvariablen

Wertebereich	ein Intervall in $(-\infty, \infty)$
Verteilungsfunktion	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\; dt$
Erwartungswert	$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\; f(t)dt$
Varianz	$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\, t - E(X)\,)^2 \; f(t)dt$

Beachte: f ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

- $f(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
- $f(t)$ ist stetig bis auf abzählbar viele Punkte,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\; dt = 1.$

11 Ungleichung von Tschebyschev

$$P(\, |X - E(X)| \geq c\,) \;\leq\; \frac{Var(X)}{c^2} \qquad \text{oder} \qquad P(\, |X - E(X)| < c\,) \;\geq\; 1 - \frac{Var(X)}{c^2}$$

12 Zufallsvariablen X und Y

Kovarianz von X und Y:

$$Cov(X,Y) \quad = \quad E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

Korrelationskoeffizient von X und Y:

$$\rho_{XY} \quad = \quad \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}}$$

Für alle Zufallsvariablen X, Y und alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} E(aX + bY + c) &= aE(X) + bE(Y) + c \\ Var(aX + b) &= a^2 Var(X) \\ Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ Var(X \pm Y) &= Var(X) + Var(Y) \pm 2\, Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) &= 0 \quad \text{falls } X, Y \text{ unkorreliert} \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} X, Y \text{ unabhängig} &\Rightarrow X, Y \text{ unkorreliert} \\ X, Y \text{ unkorreliert} &\not\Rightarrow X, Y \text{ unabhängig} \end{aligned}$$

13 Grenzwertsätze

- $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$
- $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
- $Y_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$

Gesetz der grossen Zahlen

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \overline{X}_n - \mu \right| < c \right) \; = \; 1}$$

Satz von Bernoulli Die relative Häufigkeit eines zufälligen Ereignisses A in n unabhängigen Wiederholungen konvergiert stochastisch gegen die Wahrscheinlichkeit $p = p(A)$ des Ereignisses A.

Zentraler Grenzwertsatz

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P(Y_n \leq y) \; = \; \Phi(y) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt}$$

14 Zufallsvektoren (X, Y)

X, Y diskret

- $X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $Y \in \{y_1, y_2, \ldots, x_m\}$ und $p_{jk} = P(x_j, y_k) \;=\; P(\,(X = x_j) \cap (Y = y_k)\,)$
- $p_{j\bullet} \;=\; P(X = x_j) \;=\; \sum_{k=1}^{m} p_{jk}$ und $p_{\bullet k} \;=\; P(Y = y_k) \;=\; \sum_{j=1}^{l} p_{jk}$

		Y						Vert. von X
		y_1	y_2	$\ldots$	y_k	$\ldots$	y_m	
	x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1k}	$\ldots$	p_{1m}	$p_{1\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
X	x_j	p_{j1}	p_{j2}	$\ldots$	p_{jk}	$\ldots$	p_{jm}	$p_{j\bullet}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	x_l	p_{l1}	p_{l2}	$\ldots$	p_{lk}	$\ldots$	p_{lm}	$p_{l\bullet}$
Vert. von Y		$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\ldots$	$p_{\bullet k}$	$\ldots$	$p_{\bullet m}$	n

Bedingte Verteilungen

$$f_{X|Y}(x_j|y_k) \;=\; P(X = x_j \mid Y = y_k) \;=\; \frac{p_{jk}}{p_{\bullet k}} \qquad \text{bzw.} \qquad f_{Y|X}(y_k|x_j) \;=\; P(Y = y_k \mid X = x_j) \;=\; \frac{p_{jk}}{p_{j\bullet}}$$

Bedingte Erwartungswerte

$$E(X|y_k) \;=\; \sum_{i=1}^{l} x_i \; f_{X|Y}(x_i|y_k) \qquad \text{bzw.} \qquad E(Y|x_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} y_i \; f_{Y|X}(y_i|x_j)$$

X, Y stetig

Verteilungsfunktion

$$F(x, y) \;=\; P(\,(X \le x) \cap (Y \le y)\,) \;=\; \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s, t)\; ds\; dt.$$

Randdichten

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\; dy \qquad \text{und} \qquad f_Y(y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\; dx$$

Bedingte Dichten

$$f_{X|Y}(x|y) \;=\; \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \qquad \text{und} \qquad f_{Y|X}(y|x) \;=\; \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Bedingte Erwartungswerte

$$E(X|y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\; f_{X|Y}(x|y)\; dx \qquad \text{bzw.} \qquad E(Y|x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} y\; f_{Y|X}(y|x)\; dy$$

15 Spezielle diskrete Verteilungen

Binomialverteilung

- Ein Experiment hat **zwei** mögliche Ergebnisse: E (Erfolg) und E^c (Misserfolg).
- Das Experiment wird eine feste Anzahl n mal durchgeführt.
- Die Durchführungen erfolgen unabhängig voneinander.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit p ist **konstant**.

Es sei X = Anzahl der Erfolge in den n Versuchen.
Dann ist X **binomialverteilt** (kurz: $X \sim B(n;p)$) und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= f_{Bi}(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{für } x = 0,1,2,\ldots,n \\ E(X) &= np \\ Var(X) &= np(1-p) \end{aligned}}$$

Geometrische Verteilung

- Ein Experiment hat **zwei** mögliche Ergebnisse: E (Erfolg) und E^c (Misserfolg).
- Das Experiment wird durchgeführt bis erstmals ein Erfolg eintritt.
- Die Durchführungen erfolgen unabhängig voneinander.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit p ist **konstant**.

Es sei X = Anzahl der Versuche **vor** dem ersten Erfolg.
Dann ist X **geometrisch verteilt** und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= (1-p)^x\, p \quad \text{für } x = 0,1,2,\ldots \\ E(X) &= \frac{1-p}{p} \\ Var(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}}$$

Hypergeometrische Verteilung

Von N Elementen seien S vom Typ E und $W = N - S$ vom Typ E^c. Eine Stichprobe vom Umfang n wird gezogen (ohne Zurücklegen).

Es sei X = Anzahl der Elemente vom Typ E in dieser Stichprobe.

Dann ist X **hypergeometrisch verteilt** und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{\binom{S}{x}\binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{für } 0 \le x \le n \\ E(X) &= n\frac{S}{N} \\ Var(X) &= n\frac{S}{N}\left(1-\frac{S}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \end{aligned}}$$

Poisson-Verteilung

Ausgehend von zufälligen Ereignissen, die innerhalb eines zeitlichen Kontinuums mit der **Intensitätsrate** $\lambda > 0$ auftreten sei

X = Anzahl der Ereignisse innerhalb dieses zeitlichen Kontinuums

Dann ist X **poissonverteilt** mit dem Parameter $\lambda > 0$ (kurz: $X \sim Po(\lambda)$) und

$$\boxed{\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda} \qquad \text{für } x = 0, 1, 2, \ldots \\ E(X) &= \lambda \\ Var(X) &= \lambda \end{aligned}}$$

16 Spezielle stetige Verteilungen

Gleichverteilungen

Dichtefunktion	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Verteilungsfunktion	$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$
Erwartungswert	$E(X) = \frac{a+b}{2}$
Varianz	$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exponentialverteilungen

Dichtefunktion	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Verteilungsfunktion	$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Erwartungswert	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$
Varianz	$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Normalverteilungen

Dichtefunktion	$\phi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
Verteilungsfunktion	$\Phi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dt$
Erwartungswert	$E(X) = \mu$
Varianz	$Var(X) = \sigma^2$

Standardnormalverteilung Werte von $\Phi(x) = \Phi(x; 0, 1)$:

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.866	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999

Zusammenhang

$$X \text{ normalverteilt} \quad \rightsquigarrow \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{standardnormalverteilt}$$

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = \Phi(b; \mu, \sigma) - \Phi(a; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)}$$

Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace

Für $X \sim B(n; p)$, $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ und $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$ gilt:

$$f_{Bi}(x; n, p) \quad \approx \phi\,(x; \mu, \sigma) \quad \text{und} \quad P(a \leq X \leq b) \quad \approx \Phi\left(\frac{b - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu - 0.5}{\sigma}\right)$$

17 Punktschätzung

Stichproben

Grundgesamtheit: Zufallsvariable X, Erwartungswert μ, Varianz σ^2

Eine Stichprobe vom Umfang n ist eine Realisierung von n unabhängigen und wie X identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$

<u>konkrete Stichprobe</u>: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

<u>Mittelwert der Stichprobe</u>: $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ (Schätzwert für μ)

<u>Varianz der Stichprobe</u>: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2$ (Schätzwert für σ^2)

Die Maximum-Likelihood-Methode

X Zufallsvariable, deren Verteilung F_X bis auf den Parameter θ bekannt sei.

<u>Likelihood-Funktion</u> zur konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) \;=\; \prod_{i=1}^{n} P(x_i; \theta) \;=\; P(x_1; \theta) \cdot P(x_2; \theta) \cdots P(x_n; \theta)}$$

mit

$$P(x_i; \theta) = \begin{cases} P(X = x_i), & X \text{ diskret} \\ f(x_i) \quad\quad , & X \text{ stetig mit Dichte } f \end{cases}$$

Ein Parameterwert $\theta_{ML} = \hat{\theta}$ mit

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_{ML}) \;\geq\; L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$$

für **alle** erlaubten θ heisst <u>Maximum-Likelihood-Schätzer</u>.

18 Konfidenzintervalle für μ einer normalverteilten Grundgesamtheit

Konfidenzniveau $1 - \alpha$

	zweiseitig	einseitig	
σ^2 bekannt	$\left[\overline{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\; \overline{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\left(-\infty,\; \overline{x} + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\overline{x} - z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$
σ^2 unbekannt	$\left[\overline{x} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}},\; \overline{x} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\left(-\infty,\; \overline{x} + t_{n-1;1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$	$\left[\overline{x} - t_{n-1;1-\alpha}\frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$

19 Testen

Mit einer konkreten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soll eine Hypothese über einen unbekannten Parameter einer Grundgesamtheit geprüft werden.

Nullhypothese H_0, Alternativhypothese H_1, Verwerfungsbereich R

<u>Entscheidung</u>:	Ist der aufgrund der Stichprobe ermittelte Wert ein Element von R, so wird H_0 abgelehnt (verworfen), andernfalls wird H_0 beibehalten.
<u>Fehler 1. Art</u>:	$P(H_0 \text{ verwerfen } \mid H_0 \text{ richtig }) \;=\; \alpha$
<u>Fehler 2. Art</u>:	$P(H_0 \text{ beibehalten } \mid H_0 \text{ falsch }) \;=\; \beta$

Signifikanztests für p

Ein Zufallsexperiment, bei dem ein Ereignis E mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p eintritt, wird n-mal durchgeführt. X zähle die Anzahl der Durchführungen, bei denen das Ereignis E eingetreten ist.

<u>Zweiseitiger Test</u>

gegeben:	$H_0 : p = p_0,\;\; H_1 : p \neq p_0$ und α	
Verwerfungsbereich:	$R = \underbrace{\{0, 1, \ldots, x_l\}}_{R_l} \cup \underbrace{\{x_r, x_r + 1, \ldots, n\}}_{R_r}$	
x_l grösste Zahl s.d.	$\displaystyle\sum_{k=0}^{x_l} \binom{n}{k}\, p_0^k\, (1 - p_0)^{n-k}$	$\leq \dfrac{\alpha}{2}$
x_r kleinste Zahl s.d	$\displaystyle\sum_{k=0}^{x_r-1} \binom{n}{k}\, p_0^k\, (1 - p_0)^{n-k}$	$\geq 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

<u>Linksseitiger Test</u>

gegeben:	$H_0 : p \geq p_0,\;\; H_1 : p < p_0$ und α	
Verwerfungsbereich:	$R = \{0, 1, \ldots, x\}$	
x grösste Zahl s.d.	$\displaystyle\sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k}\, p_0^k\, (1 - p_0)^{n-k}$	$\leq \alpha$

<u>Rechtsseitiger Test</u>

gegeben:	$H_0 : p \leq p_0,\;\; H_1 : p > p_0$ und α	
Verwerfungsbereich:	$R = \{x, x + 1, \ldots, n\}$	
x kleinste Zahl s.d.	$\displaystyle\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n}{k}\, p_0^k\, (1 - p_0)^{n-k}$	$\geq 1 - \alpha$

Signifikanztests für μ und σ einer normalverteilten Grundgesamtheit (Signifikanzniveau α)

Hypothesen H_0 H_1	Voraussetzungen	Testgrösse T	Verteilung von T	Verwerfungsbereich
Gauß-Test				
$\mu = \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ bekannt	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$	$N(0,1)$-Verteilung	$\lvert t\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $t > z_{1-\alpha}$ $t < -z_{1-\alpha}$
Einfacher t-Test				
$\mu = \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$ $\mu < \mu_0$	σ^2 unbekannt	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S_X}\sqrt{n}$	t_{n-1}-Verteilung	$\lvert t\rvert > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ $t > t_{n-1;1-\alpha}$ $t < -t_{n-1;1-\alpha}$
χ^2-Streuungstest				
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	μ unbekannt	$\frac{(n-1) \cdot S_X^2}{\sigma_0^2}$	χ^2_{n-1}-Verteilung	$t > \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ $t > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$ $t < \chi^2_{n-1;\alpha}$
Ergänzung				
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	μ bekannt	$\frac{n \cdot S_X^{*2}}{\sigma_0^2}$	χ^2_n-Verteilung	$t > \chi^2_{n;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < \chi^2_{n;\frac{\alpha}{2}}$ $t > \chi^2_{n;1-\alpha}$ $t < \chi^2_{n;\alpha}$

Signifikanztests zum Vergleich zweier Erwartungswerte μ_X und μ_Y und Varianzen σ_X^2 und σ_Y^2 von normalverteilten Grundgesamtheiten (Signifikanzniveau α)

Hypothesen H_0	H_1	Voraussetzungen	Testgrösse T	Verteilung von T	Verwerfungsbereich
Doppelter t-Test					
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$(X_1, .., X_{n_1})$, $(Y_1, .., Y_{n_2})$ unabh. Stichproben	$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$ mit		$\lvert t \rvert > t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$S =$	$t_{n_1+n_2-2}$-Verteilung	$t > t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$
$\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	$\sqrt{\frac{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}}$		$t < -t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$
Welch-Test					
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$(X_1, .., X_{n_1})$, $(Y_1, .., Y_{n_2})$ unabh. Stichproben	$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}}$	t_m-Verteilung $m =$	$\lvert t \rvert > t_{m;1-\frac{\alpha}{2}}$
$\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$		$\frac{\left(S_X^2/n_1+S_Y^2/n_2\right)^2}{\left(\frac{(S_X^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(S_Y^2/n_2)^2}{n_2-1}\right)}$	$t > t_{m;1-\alpha}$
$\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$		ganzzahlig gerundet	$t < -t_{m;1-\alpha}$
F-Test (Beachte: Gilt $X \sim F_{m,n}$, so ist $1/X \sim F_{n,m}$ und für die Quantile folgt $F_{m,n;\alpha} = \frac{1}{F_{n,m;1-\alpha}}$.)					
$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$	$(X_1, .., X_{n_1})$, $(Y_1, .., Y_{n_2})$ unabh. Stichproben	S_X^2/S_Y^2	F_{n_1-1,n_2-1}-Verteilung	$t > F_{n_1-1,n_2-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ oder $t < F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}}$
$\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	μ_X, μ_Y unbekannt	S_X^2/S_Y^2	F_{n_1-1,n_2-1}-Verteilung	$t > F_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha}$
$\sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	S_Y^2/S_X^2	F_{n_2-1,n_1-1}-Verteilung	$t > F_{n_2-1,n_1-1;1-\alpha}$

p-Wert

Der p-Wert eines Testes kann wie folgt bestimmt werden: Nimm an, dass H_0 korrekt ist und bestimme (unter dieser Annahme) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Testgrösse T entweder den Wert t oder weitere Werte annimmt, die ausgehend von t noch stärker für die Alternative H_1 sprechen.

$$\text{p-Wert} = \begin{cases} P(\ T \geq t \mid H_0 \text{ stimmt }) & \text{rechtsseitiger Test} \\ P(\ T \leq t \mid H_0 \text{ stimmt }) & \text{linksseitiger Test} \\ P(\ \lvert T \rvert \geq t \mid H_0 \text{ stimmt }) & \text{zweiseitiger Test} \end{cases}$$

t-Verteilung: Quantile $t_{n;p}$

	p					
n	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	3.08	6.31	12.70	31.82	63.70	318.30
2	1.89	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17
5	1.48	2.01	2.57	3.37	4.03	5.89
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21
7	1.42	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58
20	1.33	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.49
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44
27	1.31	1.71	2.05	2.47	2.77	3.42
28	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09

χ^2-Verteilung: Quantile $\chi^2_{n;p}$

	p									
n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.020	0.051	0.103	0.210	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.580	6.25	7.81	9.53	11.35	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.060	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.150	1.610	9.24	11.07	12.83	15.08	16.75
6	0.676	0.872	1.240	1.640	2.200	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.240	1.690	2.170	2.830	12.02	14.07	16.01	18.47	20.28
8	1.340	1.650	2.180	2.730	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	22.96
9	1.730	2.090	2.700	3.330	4.170	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.160	2.560	3.250	3.940	4.870	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.600	3.050	3.820	4.570	5.580	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.070	3.570	4.400	5.230	6.300	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.570	4.110	5.010	5.890	7.040	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.070	4.660	5.630	6.570	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.600	5.230	6.260	7.260	8.550	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.140	5.810	6.910	7.960	9.310	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.700	6.410	7.560	8.670	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.260	7.010	8.230	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.840	7.630	8.910	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.430	8.260	9.590	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.030	8.900	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.640	9.540	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.890	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	47.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.51	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

F-Verteilung: Quantile $F_{n_1,n_2;p}$ für $p = 0.95$

	n_1															
n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	20	50	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	245	246	248	252	254
2	19.0	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.71	8.69	8.66	8.58	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.87	5.84	5.80	5.70	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.64	4.60	4.56	4.44	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.96	3.92	3.87	3.75	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.53	3.49	3.44	3.32	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.24	3.20	3.15	3.02	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.03	2.99	2.93	2.80	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.86	2.83	2.77	2.64	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.74	2.70	2.65	2.51	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.64	2.60	2.54	2.40	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.55	2.51	2.46	2.31	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.48	2.44	2.39	2.24	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.38	2.42	2.38	2.33	2.18	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.37	2.33	2.28	2.12	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.33	2.29	2.23	2.08	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.29	2.25	2.19	2.04	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.26	2.21	2.15	2.00	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.22	2.18	2.21	1.97	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.20	2.16	2.10	1.94	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.17	2.13	2.07	1.91	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.15	2.11	2.05	1.88	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.13	2.09	2.03	1.86	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.11	2.07	2.01	1.84	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.10	2.05	1.99	1.82	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.08	2.04	1.97	1.81	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.06	2.02	1.96	1.79	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.05	2.01	1.94	1.77	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.04	1.99	1.93	1.76	1.62
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.07	2.01	1.97	1.91	1.74	1.59
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.05	1.99	1.95	1.89	1.71	1.57
36	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.03	1.98	1.93	1.87	1.69	1.55
38	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.02	1.96	1.92	1.85	1.68	1.53
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.95	1.90	1.84	1.66	1.51
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	1.99	1.93	1.89	1.83	1.65	1.49
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	1.98	1.92	1.88	1.81	1.63	1.48
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.15	2.09	2.04	1.97	1.91	1.87	1.80	1.62	1.46
48	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.96	1.90	1.86	1.79	1.61	1.45
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.89	1.85	1.78	1.60	1.44
55	4.02	3.16	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.06	2.01	1.93	1.88	1.83	1.76	1.58	1.41
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.86	1.82	1.75	1.56	1.39
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.03	1.98	1.90	1.85	1.80	1.73	1.54	1.37
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.89	1.84	1.79	1.72	1.53	1.35
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.88	1.82	1.77	1.70	1.51	1.32
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.79	1.75	1.68	1.48	1.28
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.96	1.91	1.83	1.77	1.72	1.65	1.45	1.25
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.76	1.71	1.64	1.44	1.22
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.80	1.74	1.69	1.62	1.41	1.19
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.78	1.72	1.67	1.60	1.38	1.13
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.70	1.65	1.58	1.36	1.08
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.69	1.64	1.57	1.35	1.00

20 Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c \;=\; 0 \qquad\qquad x_{1,2} \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

21 Grenzwertsätze

- $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) &= a \pm b \\ \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b \\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} \quad \text{falls } b_n \neq 0 \text{ und } b \neq 0. \end{aligned}$$

- Jede beschränkte monotone Zahlenfolge ist konvergent.
- Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.
- Das Produkt aus einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.

22 Summenformel der geometrischen Reihe

- endliche geometrische Reihe

$$s_n \;=\; a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1} \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} aq^k \;=\; a\,\frac{1-q^n}{1-q}$$

- unendliche geometrische Reihe:

$$s \;=\; a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} aq^k \;=\; \frac{a}{1-q} \qquad \text{falls } |q| < 1$$

23 Die Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \cdots + \frac{p^n}{n!}\right) \;=\; e^p$$

24 Finanzmathematik

Zinseszinsformel	Barwert	(nachschüssige) Rentenformel
$K_n \;=\; K_0(1+p)^n$	$K_0 \;=\; K_n \dfrac{1}{(1+p)^n}$	$K_n \;=\; K_0(1+p)^n + E\,\dfrac{(1+p)^n - 1}{p}$

Allgemeine (nachschüssige) Rentenformel (jährlicher Zins p, k-malige jährliche Verzinsung)

$$K_n \;=\; K_0\, q^n + E\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit} \quad q = \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k$$

25 Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) & \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

26 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Sei $a > 0$ und $a \neq 1$, r, s beliebig und $u, v > 0$

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & \log_a(u \cdot v) &= \log_a(u) + \log_a(v) \\ \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} & \log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a(u) - \log_a(v) \\ (a^r)^s &= (a^s)^r = a^{r \cdot s} & \log_a(u^w) &= w \cdot \log_a(u) \end{aligned}$$

27 Stetigkeit

f heisst an der Stelle x_0 stetig, falls (1) $f(x_0)$ definiert ist und (2) $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$

28 Grenzwerte bei Funktionen

1.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^a}$	$=$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-a}$	$=$	0	für $a > 0$
2.	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k}$	$=$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^{-k}$	$=$	0	für $k \in \mathbb{N}$
3.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x}$	$=$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^{-x}$	$=$	0	für $a > 1$
4.	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{a^x}$	$=$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^{-x}$	$=$	$+\infty$	für $a > 1$
5.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\log_a(x)}$	$=$		$=$	0	für $a > 1$
6.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x}$	$=$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^a e^{-x}$	$=$	0	für $a > 0$
7.	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a}$	$=$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-a} \cdot \ln(x)$	$=$	0	für $a > 0$

29 Differentiationsregeln

1.	$y = k$ konstant	$y' = 0$	
2.	$y = a \cdot f(x)$ mit $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot f'(x)$	Konstantenregel
3.	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$	Summenregel
4.	$y = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$	$y' = a \cdot x^{a-1}$	Potenzregel
5.	$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	Produktregel
6.	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x) \neq 0$	$y' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	Quotientenregel
7.	$y = f(g(x))$	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	Kettenregel

30 Ableitungen spezieller Funktionen

$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$n \neq 0$, beliebige reelle Zahl
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$	
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$	
$y = \tan(x)$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	
$y = a^x$	$y' = \ln(a) \cdot a^x$	
$y = \log_a(x)$	$y' = \dfrac{1}{\ln(a)} \cdot \dfrac{1}{x}$	

31 Ökonomische Funktionen

marginale Funktion von $y = f(x)$	Elastizität von $y = f(x)$	Wachstumsrate von $y = f(t)$
$f'(x)$	$\epsilon_{f,x}(x) = \dfrac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$	$r_f(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)} = \dfrac{d}{dt} \ln(f(t))$

32 Das Taylorpolynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

33 Partielle Elastizitäten

$$\epsilon_{f,x}(x,y) \;=\; \frac{f_x(x,y)\cdot x}{f(x,y)} \qquad \epsilon_{f,y}(x,y) \;=\; \frac{f_y(x,y)\cdot y}{f(x,y)}$$

34 Tangentialebene

$$T(x,y) \;=\; f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

35 Totales Differential

$$df(x_0,y_0,dx,dy) = f_x(x_0,y_0)\cdot dx + f_y(x_0,y_0)\cdot dy \;=\; T(x_0+dx,y_0+dy) - T(x_0,y_0)$$

36 Verallgemeinerte Kettenregel

$$z(t) \;=\; f(h(t),g(t)) \qquad \Rightarrow \qquad z'(t) \;=\; f_x(x,y)\,\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\,\frac{dy}{dt}$$

37 Implizite Differentiation

$$\phi(x,y(x)) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy(x_0)}{dx} \;=\; y'(x_0) \;=\; -\frac{\phi_x(x_0,y_0)}{\phi_y(x_0,y_0)}$$

38 Eulersche Relation

$$z \;=\; f(x,y) \text{ homogen vom Grad } g \qquad \Rightarrow \qquad g\cdot f(x,y) = x\cdot f_x(x,y) + y\cdot f_y(x,y).$$

39 Gradient, Hesse-Matrix und quadratische Approximation

$$\textbf{grad}\; f(\mathbf{x}) \;=\; \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \qquad H_f(\mathbf{x}) \;=\; \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_2(\mathbf{x}) \;=\; f(\mathbf{a}) + \textbf{grad}\; f(\mathbf{a})^T\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}\,(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\cdot H_f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})}$$

40 Einhüllendensatz

Sei $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ eine (stetig differenzierbare) Funktion für $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ (n Variablen) und $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_m)$ (m Parameter), $\mathbf{x}^*(\mathbf{p})$ die Lösung des Maximierungsproblems und $f^*(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}),\mathbf{p})$ die Optimalwertfunktion.

Dann gilt für alle $i = 1,\ldots,n$:

$$\boxed{f^*_{p_i}(\mathbf{p}) \;=\; f_{p_i}(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}),\mathbf{p})}$$

41 Lokale (innere) Extremalstellen ohne Nebenbedingung

	Maximum in $\mathbf{a}$	Minimum in $\mathbf{a}$	Sattelpunkt in $\mathbf{a}$
notwendige Bedingung	$\mathbf{grad}\ f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ bzw. $f_x = f_y = 0$	$\mathbf{grad}\ f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ bzw. $f_x = f_y = 0$	$\mathbf{grad}\ f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ bzw. $f_x = f_y = 0$
hinreichende Bedingung	$H_f(\mathbf{a})$ negativ definit bzw. $f_{xx} < 0, f_{yy} < 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$H_f(\mathbf{a})$ positiv definit bzw. $f_{xx} > 0, f_{yy} > 0$ $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$	$H_f(\mathbf{a})$ indefinit bzw. $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

42 Lokale Extrema mit Nebenbedingung

Zielfunktion $\quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Nebenbedingung $\quad \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

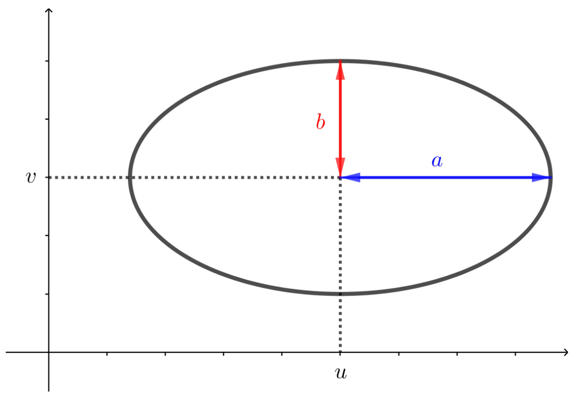
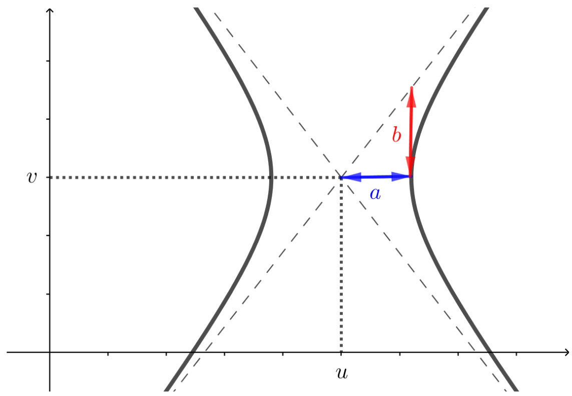
Lagrange Funktion $\quad L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda \cdot \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Optimalitätsbedingung $\quad L_{x_1} = 0,\ L_{x_2} = 0,\ \ldots,\ L_{x_n} = 0,\ L_\lambda = 0$ oder $\mathbf{grad}\ L = \mathbf{0}$ oder

$$\mathbf{grad}\ f = \lambda \cdot \mathbf{grad}\ \phi$$

Allgemein $\quad \mathbf{grad}\ f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \mathbf{grad}\ \phi_k \qquad$ (bei m Nebenbedingungen $\phi_1, \ldots, \phi_m$)

43 Ellipsen und Hyperbeln

Ellipse mit dem Mittelpunkt (u, v) und den Achsen a und b	Hyperbel mit dem Zentrum (u, v) und den Achsen a und b
$\phi(x,y) = \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0$ 	$\phi(x,y) = \frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0$ 

44 Integration

Partielle Integration

$$\int u'(x)\, v(x) dx \;=\; u(x)\, v(x) - \int u(x)\, v'(x) dx$$

Substitution

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \int \, f(g)\, dg$$

Spezielle Stammfunktionen

$f(x)$	$\int f(x)\, dx \;=\; F(x) + C$	
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$	$n \neq -1$, beliebige reelle Zahl
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
e^x	$e^x + C$	
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda x} + C$	
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$	
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$	

45 Doppelintegrale

Integration über Normalbereiche vom Typ I

$$A_I = \{\ (x,y) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq o(x)\ \} \quad \longrightarrow \quad \iint\limits_{A_I} f(x,y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{o(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Integration über Normalbereiche vom Typ II

$$A_{II} = \{\ (x,y) \mid l(y) \leq x \leq r(y), c \leq y \leq d\ \} \quad \longrightarrow \quad \iint\limits_{A_{II}} f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Leibniz-Formel

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,t) dt \quad \longrightarrow \quad F'(x) = f(x, d(x)) \cdot d'(x) - f(x, c(x)) \cdot c'(x) + \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,t) dt$$

46 Matrizenrechnung

Addition und Multiplikation

1a.	$A+B=B+A$	1b.	Im Allgemeinen: $AB \neq BA$
2a.	$(A+B)+C=A+(B+C)$	2b.	$(AB)C=A(BC)$
3a.	$A+0=A$	3b.	$AI=IA=A$, falls A quadratisch

Beachte

4. $AB=0 \quad \not\Rightarrow \quad A=0$ oder $B=0$
5. $AB=AC \quad \not\Rightarrow \quad B=C$

Distributivgesetze

6. $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B \qquad \lambda\in\mathbb{R}$
7. $A(B+C) = AB+AC$
8. $(A+B)C = AC+BC$

Inverse und Transponierte

Definition von A^{-1}: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

9. $(A^{-1})^{-1} = A$
10. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
11. $(A^T)^T = A$
12. $(A+B)^T = A^T+B^T$
13. $(AB)^T = B^TA^T$
14. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Für $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $ad-bc\neq 0$ gilt $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Determinanten

15. $\det(A) = a_{11}\det(A_{11})-a_{12}\det(A_{12})+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})$
16. $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$
17. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
18. $\det(A^T) = \det(A)$

Beachte

19. A^{-1} existiert $\quad\Leftrightarrow\quad \det(A)\neq 0$
20. $|\det(A)|$ ist das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelepipeds.

47 Lineare Gleichungssysteme

gegeben: A eine $(m\times n)$-Matrix, $\mathbf{b}$ ein Spaltenvektor der Länge m

gesucht: Spaltenvektor $\mathbf{x}$ der Länge n, so dass $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

Lösbarkeitskriterium : rg(A) = rg(A; $\mathbf{b}$)

Eindeutigkeitskriterium : rg(A) = n

48 Reguläre und singuläre Matrizen

$A = A_{n\times n}$ regulär	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{rg}(A) = n$
	$\Leftrightarrow$	A^{-1} existiert
	$\Leftrightarrow$	$\det(A) \neq 0$
	$\Leftrightarrow$	Spaltenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$
	$\Leftrightarrow$	Zeilenvektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$
$A = A_{n\times n}$ singulär	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{rg}(A) < n$
	$\Leftrightarrow$	A^{-1} existiert nicht
	$\Leftrightarrow$	$\det(A) = 0$
	$\Leftrightarrow$	Spaltenvektoren sind linear abhängig
	$\Leftrightarrow$	Zeilenvektoren sind linear abhängig

49 Eigenwerte und Eigenvektoren

gegeben: quadratische Matrix $A = A_{n\times n}$

gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, so dass $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$

Lösung:

1. Schritt: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

2. Schritt:
$$\begin{array}{lcl} (A - \lambda_1\, I)\,\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \mathbf{x}^{(1)} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_1 \\ (A - \lambda_2\, I)\,\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0} & \Rightarrow & \mathbf{x}^{(2)} \text{ Eigenvektor zu } \lambda_2 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

50 Quadratische Formen

Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix. Dann heisst die Funktion $Q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \bullet A\mathbf{x}$ die zu A gehörige quadratische Form.

Hurwitz: Die symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn alle führenden Hauptminoren von A grösser Null sind.

Semi-Hurwitz: Die symmetrische Matrix A ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Hauptminoren (einschliesslich führender Hauptminoren) von A grösser oder gleich Null sind.

51 Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Normalform: $y_{k+1} \;=\; A \cdot y_k + B$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ und $A \neq 0$

Allgemeine Lösung

$$\boxed{y_k = \begin{cases} A^k\,(y_0 - y^*) + y^* & A \neq 1, \;\; y^* = \dfrac{B}{1-A} \\ y_0 + Bk & A = 1 \end{cases}}$$

52 Lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung

Normalform $(a_1, a_2, r \in \mathbb{R})$

$$\boxed{y_{k+2} + a_1\, y_{k+1} + a_2\, y_k = r}$$

Charakteristische Gleichung

$$\boxed{m^2 + a_1\, m + a_2 = 0}$$

Allgemeine Lösung, Superpositionsprinzip

$$\boxed{y_k = c_1\, y_k^{(1)} + c_2\, y_k^{(2)} + y_k^*}$$

- $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung
- y_k^* eine (spezielle) Lösung der inhomogenen Gleichung

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

1. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 > 0}$ Die charakteristische Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen m_1 und m_2 und die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist
$$y_k = c_1\, m_1^k + c_2\, m_2^k$$
2. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 = 0}$ Die charakteristische Gleichung hat eine reelle Lösung $m = -\frac{a_1}{2}$ und die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist
$$y_k = (c_1 + c_2\, k)\, m^k$$
3. $\boxed{a_1^2 - 4a_2 < 0}$ Die charakteristische Gleichung hat keine reelle Lösungen und die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist
$$y_k = R^k(c_1\, \sin(k\phi) + c_2\, \cos(k\phi))$$
wobei
   - $R = \sqrt{a_2}$
   - $\cos(\phi) = -\dfrac{a_1}{2\sqrt{a_2}}, \quad 0 \le \phi < \pi$

Spezielle Lösung y_k^* der inhomogenen Gleichung

$1 + a_1 + a_2 \neq 0$	$y_k^* = \dfrac{r}{1 + a_1 + a_2} = konstant$
$1 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 \neq -2$	$y_k^* = \dfrac{r}{2 + a_1} \cdot k$
$1 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 = -2$	$y_k^* = \dfrac{r}{2} \cdot k^2$