

Statistik

Dr. Thomas Zehrt

Elementares Rechnen

1 Variablen

In vielen Vorlesungen während Ihres Ökonomiestudiums werden Ihnen mathematische Ausdrücke (insbesondere Funktionen) begegnen, in denen Variablen vorkommen. Dabei haben sich für bestimmte (ökonomische und mathematische) Grössen auch ganz bestimmte Variablen(namen) eingebürgert.

Neben dem lateinischen spielt hier insbesondere das griechische Alphabet eine grosse Rolle und es ist für viele Studenten problematisch, mit solchen ungewohnten Zeichen umzugehen. So bereitet es meist kein Problem, die allgemeine quadratische Gleichung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

nach x aufzulösen. Schreibt man die selbe Gleichung aber mit anderen Variablen und verlangt die Auflösung nach ζ (zeta) scheint die Lösung des Problems in weite Ferne zu rücken:

$$\zeta^2 + 2\zeta - 8 = 0$$

oder sogar

$$\Lambda\zeta^2 + \frac{\Sigma}{\epsilon\delta}\zeta + \frac{\eta}{\kappa} = \rho - \Gamma \quad (1)$$

Also: Keine Angst vor (noch!!) fremden Symbolen!

Einige gebräuchliche griechische Buchstaben

Bezeichnung	klein	gross	Bezeichnung	klein	gross
alpha	α		beta	β	
gamma	γ	Γ	delta	δ	Δ
epsilon	ϵ		zeta	ζ	
kappa	κ		lambda	λ	Λ
sigma	σ	Σ	eta	η	
pi	π	Π	phi	ϕ	Φ

2 Bruchrechnen

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ (oder auch a/b) ist das Ergebnis der Division $a : b$. Die Zahl a heisst der Zähler und die Zahl b der Nenner des Bruches.

Mögliche Deutung: $\frac{a}{b}$ gibt das Grössenverhältnis von a und b an. Zum Beispiel bedeutet $\frac{a}{b} = 2$, dass der Zähler a genau 2 mal so gross ist wie der Nenner b . Da sich dieses Grössenverhältnis **nicht** ändert, wenn Zähler und Nenner mit der selben Zahl multipliziert (bzw. durch dieselbe Zahl dividiert) werden, können wir direkt die Regeln des Erweiterns und des Kürzens von Brüchen ableiten.

Satz 1 (Erweitern und Kürzen) Für alle reellen Zahlen $c \neq 0$ gilt

<i>Erweitern</i>	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$
<i>Kürzen</i>	$\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a \cdot \frac{1}{c}}{b \cdot \frac{1}{c}}$

!! Vorsicht Fehler !!

Auf einen häufig gemachten Fehler macht die wohlbekannte Regel aufmerksam:
(Differenzen und) Summen kürzen nur die Dummen.

Beispiel:

$$\text{Falsch: } \frac{9}{15} = \frac{3+6}{15} \neq \frac{3/3+6}{15/3} = \frac{1+6}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\text{Richtig: } \frac{9}{15} = \frac{3+6}{15} = \frac{3/3+6/3}{15/3} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5}$$

!! Vorsicht Fehler !!

Satz 2 (Rechenregeln)

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$	$= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$	$= \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{d \cdot b}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$	$= \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$	$= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$= \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Beispiele

- Erweitern

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$$

- Kürzen

$$\frac{14}{200} = \frac{14/2}{200/2} = \frac{7}{100}$$

- Addition

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{21} = \frac{2 \cdot 21}{7 \cdot 21} + \frac{5 \cdot 7}{21 \cdot 7} = \frac{42}{147} + \frac{35}{147} = \frac{77}{147}$$

Bemerkung: Dieses Rezept, zwei Brüche gleichnamig zu machen, funktioniert immer. Oft ist es aber einfacher, das kleinste gemeinsame Vielfache beider Nenner zu suchen und beide Brüche entsprechend zu erweitern. In unserem Beispiel sieht man schnell, dass man auch den ersten Bruch mit 3 erweitern könnte:

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{21} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} + \frac{5}{21} = \frac{6}{21} + \frac{5}{21} = \frac{11}{21}$$

- Produkt

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{21} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 21} = \frac{10}{147}$$

- Quotient

$$\frac{2}{7} : \frac{5}{21} = \frac{2}{7} \cdot \frac{21}{5} = \frac{42}{35}$$

3 Prozentrechnen

1% von irgendetwas bedeutet nichts anderes als $\frac{1}{100}$ von demselbigen, d.h. Prozentrechnen ist nichts anderes als Bruchrechnen in Hundertsteln.

Beispiele:

$$3\% \text{ von } 50 = 3 \cdot 1\% \cdot 50 = 3 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50 = 1.5$$

$$7.32\% \text{ von } 500 = 7.32 \cdot 1\% \cdot 500 = 7.32 \cdot \frac{1}{100} \cdot 500 = 36.5$$

4 Rechnen mit Potenzen

Sei x eine reelle und n eine natürliche Zahl. Dann sind die n -ten Potenzen von x wie folgt definiert:

$$x^0 := 1 \qquad x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}} \qquad x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

Insbesondere gilt auch $0^0 = 1$.

Satz 3 (Rechenregeln Potenzrechnen) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

x^{n+m}	$=$	$x^n \cdot x^m$
$(x^n)^m$	$=$	$x^{n \cdot m}$
$(x \cdot y)^n$	$=$	$x^n \cdot y^n$

Beweis: Diese drei Regeln können leicht bewiesen werden, wenn man alle Potenzen wieder in Produkten ausschreibt und die Kommutativität der Multiplikation ausnutzt.

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= \underbrace{x \cdot \dots \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n+m} = \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_n \cdot \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_m = x^n \cdot x^m \\ (x^n)^m &= \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_n^m = \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_n \cdot \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_n \cdot \dots \cdot \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_n = x^{n \cdot m} \\ (x \cdot y)^n &= \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \dots \cdot (x \cdot y)}_n = \underbrace{(x \cdot \dots \cdot x)}_n \cdot \underbrace{(y \cdot \dots \cdot y)}_n = x^n \cdot y^n \end{aligned}$$

□

Ganz analog zur Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“, gilt auch „Potenzrechnung geht vor Punktrechnung“. Also gilt z.B.

$$\begin{aligned} x + y^n &:= x + (y^n) \\ x \cdot y^n &:= x \cdot (y^n) \\ x^{y^z} &:= x^{(y^z)} \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 7^7 &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^4 \cdot 7^3 \\ (2^2)^3 &= (2 \cdot 2)^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^6 \\ (2 \cdot 3)^3 &= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 2^3 \cdot 3^3 \\ 2^{2^{2^2}} &= 2^{2^4} = 2^{16} = 65536 \end{aligned}$$

5 Summen- und Produktzeichen

Beide Symbole \sum und \prod können als Abkürzungen für mehrfaches Addieren bzw. Multiplizieren von nicht notwendigerweise gleichen Summanden bzw. Faktoren angesehen werden. Falls wir eine Eigenschaft E betrachten, die jede Zahl entweder hat oder nicht hat (typische Eigenschaften wären: x ist gerade Zahl, x ist grösser als 3 und kleiner als 8, ...), so können wir die Summe bzw. das Produkt aller Zahlen mit dieser Eigenschaft E wie folgt kurz schreiben:

$$\begin{aligned} \text{Summe aller Zahlen mit Eigenschaft } E & \quad =: \quad \sum_{x \text{ hat } E} x \\ \text{Produkt aller Zahlen mit Eigenschaft } E & \quad =: \quad \prod_{x \text{ hat } E} x \end{aligned}$$

Für die Addition bzw. das Produkt der n Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ schreibt man

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n & \quad =: \quad \sum_{i=1}^n x_i \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n & \quad =: \quad \prod_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Für die Addition bzw. das Produkt der n Zahlen $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n$ mit $k \leq n$ schreibt man entsprechend

$$\begin{aligned} x_k + x_{k+1} + \dots + x_{n-1} + x_n & \quad =: \quad \sum_{i=k}^n x_i \\ x_k \cdot x_{k+1} \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n & \quad =: \quad \prod_{i=k}^n x_i \end{aligned}$$

Vereinbarung für $k > n$:

$$\sum_{i=k}^n x_i := 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i=k}^n x_i := 1.$$

Wir wollen nun noch ausführlich erläutern, wie man eine Summe der Gestalt $\sum_{i=1}^n x_i$ ausschreibt:

- Nehme den Startindex $i = 1$.
 - Setze in x_i (das ist der Ausdruck rechts vom Summenzeichen) anstelle von i diesen Index 1 ein und schreibe x_1 auf.
 - Nehme den nächsten Index (den um 1 höheren) $i = 2$.
 - Setze in x_i anstelle von i diesen Index 2 ein und man erhält x_2 .
 - Addiere x_2 zu x_1 , was $x_1 + x_2$ ergibt.
- :
- Nehme $i = n$, bilde x_n und addiere x_n zur bereits gebildeten Summe $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$. Man erhält also $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$. Fertig!!

Beispiele:

1. $\sum_{i=1}^5 i^2 = ?$

Es ist $x_i = i^2$ und $x_1 = 1^2 = 1$, $x_2 = 2^2 = 4$, $x_3 = 3^2 = 9$, $x_4 = 4^2 = 16$, $x_5 = 5^2 = 25$ und somit

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{i=-2}^2 i^3 &= (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 \\ &= (-8) + (-1) + 0 + 1 + 8 = 0. \end{aligned}$$

3.

$$\sum_{i=3}^6 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.$$

Allgemein: Ist c irgend eine Konstante, so gilt stets

$$\sum_{i=k}^n c = c \cdot \sum_{i=k}^n 1 = c \cdot \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n-k+1} = c \cdot (n - k + 1)$$

4.

$$\sum_{i=1}^3 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14.$$

5.

$$\begin{aligned} \prod_{i=-2}^2 (i+3) &= (-2+3) \cdot (-1+3) \cdot (0+3) \cdot (1+3) \cdot (2+3) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \end{aligned}$$

Bemerkung:

Alle Probleme bei der Handhabung von Summen- und Produktzeichen verschwinden, wenn man diese Abkürzungen wieder ausschreibt!!

!! Vorsicht Fehler !!

Wie schon in den vorhergehenden Beispielen dargestellt ist, gilt z.B. $\sum_{i=3}^6 5 = 20$. Leider werden solche Summen von den Studierenden meist zu $\sum_{i=3}^6 5 = 5$ vereinfacht, da hinter dem Summenzeichen der Laufindex i nicht vorkommt. Als kleine „Eselsbrücke“ könnte hier die folgende Kette von Umformungen dienen:

$$\sum_{i=3}^6 5 = \sum_{i=3}^6 5 \cdot 1 = \sum_{i=3}^6 5 \cdot 1^i = 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^6 = 20$$

!! Vorsicht Fehler !!

Satz 4 (Regel zur Indexverschiebung) Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Dann gilt

$\sum_{i=k}^l x_i = \sum_{i=k+a}^{l+a} x_{i-a}$	$\prod_{i=k}^l x_i = \prod_{i=k+a}^{l+a} x_{i-a}$
---	---

Beweis: Zum besseren Verständnis dieser Regel wollen wir den Beweis für die Summenformel führen. Dazu schreiben wir einfach beide Seiten der Gleichung aus.

- Linke Seite:

$$\sum_{i=k}^l x_i = x_k + x_{k+1} + \dots + x_{l-1} + x_l$$

- Rechte Seite:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+a}^{l+a} x_{i-a} &= x_{(k+a)-a} + x_{(k+a+1)-a} + \dots + x_{(l+a-1)-a} + x_{(l+a)-a} \\ &= x_k + x_{k+1} + \dots + x_{l-1} + x_l \end{aligned}$$

□

Beispiele:

$$1. \quad \sum_{i=3}^9 (i-5) \quad \text{und} \quad a = -3$$

Also gilt zunächst

$$\begin{aligned} x_i &= i - 5 \\ x_{i-a} &= (i - (-3)) - 5 = (i + 3) - 5 = i - 2 \end{aligned}$$

und mit der Regel für Indexverschiebungen erhält man somit:

$$\sum_{i=3}^9 (i-5) = \sum_{i=3+(-3)}^{9+(-3)} (i-2) = \sum_{i=0}^6 (i-2)$$

Durch Ausschreiben beider Summationen kann man sich leicht von der Gleichheit beider Ausdrücke überzeugen.

$$2. \quad \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^? ?$$

Offensichtlich muss hier $a = -1$ gewählt werden und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \sum_{i=1-1}^{12-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-(-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^i \end{aligned}$$

6 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Fakultäten definiert als:

$$\begin{aligned} 0! &:= 1 \\ n! &:= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^n i \end{aligned}$$

Für alle Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ ist der Binomialkoeffizient definiert als:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(\text{Obere Zahl})!}{(\text{Untere Zahl})! \cdot (\text{Obere Zahl} - \text{Untere Zahl})!}$$

Beispiele

$$\begin{aligned} \binom{4}{0} &= \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1 \\ \binom{4}{1} &= \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4 \\ \binom{4}{2} &= \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6 \\ \binom{4}{3} &= \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{24}{6 \cdot 1} = 4 \\ \binom{4}{4} &= \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1 \end{aligned}$$

Satz 5 (Eigenschaften von Fakultät und Binomialkoeffizient)

$n! = (n-1)! \cdot n$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad k, (n-k) \neq 0$
--

Beweis (für den interessierten Leser):

1. Die erste Gleichung ist schnell einzusehen, denn $n!$ ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen und dieses Produkt kann man als Produkt der ersten $(n - 1)$ natürlichen Zahlen mit der Zahl n schreiben.
2. Die zweite Gleichung ist ebenfalls schnell bewiesen. Dazu rechnen wir die rechte Seite der Gleichung aus und beachten dabei, dass die obere Zahl n und die untere Zahl $(n - k)$ ist:

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} &= \frac{(\text{Obere Zahl})!}{(\text{Untere Zahl})! \cdot (\text{Obere Zahl} - \text{Untere Zahl})!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n - (n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

3. Die dritte Gleichung spiegelt sich im so genannten Pascalschen Dreieck wieder: Ein „innerer“ Eintrag ist die Summe der beiden darüberstehenden Einträge.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} = 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} = 1 & & \binom{1}{1} = 1 \\ & & & & & & \\ & & & & \binom{2}{0} = 1 & & \binom{2}{1} = 2 & & \binom{2}{2} = 1 \\ & & & & & & \\ \binom{3}{0} = 1 & & \binom{3}{1} = 3 & & \binom{3}{2} = 3 & & \binom{3}{3} = 1 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

Der Beweis dieser Relation ist eine direkte Rechnung. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \\ \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \\ \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \end{aligned}$$

Unsere zu beweisende Gleichung übersetzt sich also direkt in die Gleichung

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!}.$$

Stimmt das??? Wir versuchen, die beiden Brüche auf der rechten Seite so zu erweitern, dass im Nenner stets $(n-k)! \cdot k!$ (wie auf der linken Seite) erscheint. Dazu muss der erste Bruch mit k und der zweite Bruch mit $(n-k)$ erweitert werden.

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \\
= & \frac{k \cdot (n-1)!}{\underbrace{k \cdot (k-1)!}_{=k!} \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot \underbrace{(n-1-k)! \cdot (n-k)}_{=(n-k)!}} \\
= & k \cdot \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} + (n-k) \cdot \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} \\
= & k \cdot \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} + n \cdot \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} - k \cdot \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} \\
= & \frac{n \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} \\
= & \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir auch die dritte Gleichung bewiesen.

□

Berechnung von Binomialkoeffizienten Am Beispiel der Berechnung von $\binom{50}{3}$ wollen wir nun drei Möglichkeiten der Berechnung von Binomialkoeffizienten kurz erläutern.

1. Direkte Berechnung der Fakultäten mit dem Taschenrechner und anschließende Division:

$$\binom{50}{3} = \frac{50!}{3! \cdot 47!} \approx \frac{3.04140932 \cdot 10^{64}}{6 \cdot 2.586232415 \cdot 10^{59}} = 0.196 \cdot 10^6 = 19'600$$

2. Kürzen von 3!

$$\binom{50}{3} = \frac{50!}{3! \cdot 47!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50}{3! \cdot 47!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 46 \cdot 47} = 19'600$$

3. Kürzen von 47!

$$\binom{50}{3} = \frac{50!}{3! \cdot 47!} = \frac{47! \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 47!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 19'600$$

Welche Variante sollte man bevorzugen???

7 Aufgaben

1. Kürzen Sie die folgenden Brüche und geben Sie die Werte der Variablen an, für die der gegebene **und** der gekürzte Bruch nicht definiert ist. Verwenden Sie gegebenenfalls die binomischen Formeln, um die Brüche zu vereinfachen.

$$a) \quad \frac{54a^2}{a^3}$$

$$b) \quad \frac{56x^2y - 16xy^2}{24yz + 40y^2}$$

$$c) \quad \frac{7a^2 - 14ab + 7b^2}{3(a - b)}$$

$$d) \quad \frac{40x^2 - 490y^2}{20x^2 + 140xy + 245y^2}$$

2. Addieren bzw. Subtrahieren Sie die folgenden Brüche und kürzen Sie dann soweit wie möglich.

$$a) \quad \frac{2}{3} + \frac{7}{6}$$

$$b) \quad \frac{3a}{7} + \frac{6a}{3} + \frac{12a}{21}$$

$$c) \quad \frac{2x}{x+1} - \frac{3y}{y+1} + \frac{xy}{(x+1)(y+1)}$$

$$d) \quad \frac{2a^2 + 5ab}{4(a+1)} + \frac{4b^2 - 2ab}{8a+8}$$

3. Multiplizieren bzw. Dividieren Sie die folgenden Brüche und kürzen Sie dann soweit wie möglich.

$$a) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

$$b) \quad \frac{3}{a^2} \cdot \frac{ab^2}{9} \cdot \frac{18a}{b^2}$$

$$c) \quad \left(\frac{3x}{4y} : \frac{6x^2}{2y} \right) : \frac{21}{16xy}$$

$$d) \quad \frac{3y^2}{3x+1} : \frac{6y^2}{12x+4}$$

$$e) \quad \frac{\frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1}}{\frac{a-b}{a+b}}$$

4. Fassen Sie die folgenden Ausdrücke zusammen und geben Sie die Werte der Variablen an, für die die zusammengefassten Terme nicht definiert sind.

a) $(a^2b)^3$

b) $(x-1)^4 + 7(x-1)^4 - 12(x-1)^4 + 3(x-1)^4$

c) $\frac{(x-1)^3}{(1-x)^3}$

d) $-121ab^3 - (11a^2b)^2 \cdot (-2a^{-3}b)$

5. Berechnen Sie die Summen.

a) $\sum_{i=2}^5 (3i-3)$

b) $\sum_{i=-2}^0 i^3$

c) $\sum_{i=-2}^3 \sqrt{k^2}$

d) $\sum_{k=-2}^3 \sqrt{k^2}$

6. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke (ohne Taschenrechner).

a) $\binom{20}{3} - \binom{100}{1}$

b) $\binom{20}{2} + \binom{20}{1}$

c) $\binom{20}{2} \cdot \binom{20}{1}$

d) $\binom{50}{48} + \frac{\binom{50}{25}}{\binom{49}{24}}$

8 Zusatzaufgaben

1. Kürzen Sie die folgenden Brüche und geben Sie die Werte der Variablen an, für die der gegebene **und** der gekürzte Bruch nicht definiert ist. Verwenden Sie gegebenenfalls die binomischen Formeln, um die Brüche zu vereinfachen.

$$a) \quad \frac{25x - 5y}{15xy}$$

$$b) \quad \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$$

$$c) \quad \frac{32x^2z + 128xyz + 128y^2z}{32x^2 + 64xy}$$

$$d) \quad \frac{108a^2c - 192b^2c}{54a^2c^2 - 144abc^2 + 96b^2c^2}$$

2. Addieren bzw. Subtrahieren Sie die folgenden Brüche und kürzen Sie dann soweit wie möglich.

$$a) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12}$$

$$b) \quad \frac{2}{a+2} + \frac{1}{3a+3} - \frac{1}{a+1}$$

$$c) \quad \frac{3a}{6ab} - \frac{7b}{3a} + \frac{2ab}{4}$$

$$d) \quad \frac{a^2 + 7ab + 4b^2}{3a + 6b} - \frac{ab}{a + 2b}$$

3. Multiplizieren bzw. Dividieren Sie die folgenden Brüche und kürzen Sie dann soweit wie möglich.

$$a) \quad \frac{a+b}{x} : \frac{y}{a+b}$$

$$b) \quad \frac{40ab + 10c}{a^2b^2} \cdot \frac{a^2b^2 + c}{12ab + 3c}$$

$$c) \quad \frac{2x - 7y}{5y^2 + 6z} : \frac{6x - 21y}{25y^2z + 30z^2}$$

$$d) \quad \frac{16x^3 - 4xy^2}{48x^2 + 48xy + 12y^2} : \frac{4x^2 + 2xy}{12x - 6y}$$

4. Fassen Sie die folgenden Ausdrücke zusammen und geben Sie die Werte der Variablen an, für die die zusammengefassten Terme nicht definiert sind.

$$a) \quad x^2 y z^3 \cdot x y^2 + (2 x y z)^3$$

$$b) \quad 13(a-1)^3 + 2(1-a)^3 - 8(a-1)^3 + 2(1-a)^3$$

$$c) \quad 5^2 x^{-1} y^3 \cdot 5^{-2} x^2 y^{-2}$$

$$d) \quad (4(x^2 y^2))^3 - ((2xy)^3)^2$$

5. Berechnen Sie die Summen.

$$a) \quad \sum_{i=4}^8 i(i-2)$$

$$b) \quad \sum_{i=-2}^3 (i^2 - 15i)$$

$$c) \quad \sum_{i=20}^{21} i^4$$

$$d) \quad \sum_{k=-2}^{-3} \sqrt{k^2}$$

6. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke (ohne Taschenrechner).

$$a) \quad \binom{10}{2} - \binom{100}{1} + \binom{100}{0}$$

$$b) \quad \binom{20}{2} : \binom{20}{1}$$

$$c) \quad \binom{100}{12} : \binom{97}{13}$$

$$d) \quad \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}$$

$$7. \quad 1 + 3 + \dots + (2n-3) + (2n-1) \\ = \sum_{i=1}^? ? = \sum_{i=3}^? ? = \sum_{i=5}^? ? = \sum_{i=?}^n ? = \sum_{i=?}^{n-1} ? = \sum_{i=?}^? (2i+5)$$

8. An einer Universität, die nicht namentlich genannt werden möchte, nahmen an einer Mathematik-Klausur 210 Studierende teil, von denen 141 die Prüfung bestanden.

- (a) Wie hoch ist die Durchfallquote?
- (b) Nach genauerer Durchsicht stellte der Dozent, der ebenfalls nicht namentlich genannt werden möchte, fest, dass von den 210 Studierenden nur 61 vor Studienbeginn Ihre Kenntnisse der Schulmathematik durch die Teilnahme an einem Vorbereitungskurs aufgefrischt hatten. Darunter sind alle, die die Klausur bestanden hatten. Wie hoch ist die Durchfallquote unter den gut bzw. schlecht vorbereiteten Studenten?

9. Seien p_0, p_1, \dots, p_n nichtnegative reelle Zahlen kleiner oder gleich 1 mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=0}^n p_i = 1.$$

Der Vektor $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ heisst dann Wahrscheinlichkeitsvektor.

Bemerkung: Einen solchen Wahrscheinlichkeitsvektor erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes in einem Vektor zusammenfasst. Wir geben dazu einige typische Beispiele an.

Werfen einer Münze $\mathbf{p} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Würfeln mit einem fairen Würfel $\mathbf{p} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

Würfeln mit einem gezinkten Würfel $\mathbf{p} = (\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{12})$

Berechnen Sie jeweils die Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass der aus den angegebenen Komponenten gebildete Vektor ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist.

- a) $p_i = c \cdot i$ für $i = 0, 1, \dots, 9$
- b) $p_i = c \cdot i$ für $i = 0, 1, \dots, n$
- c) $p_i = c \cdot i^2$ für $i = 0, 1, \dots, n$
- d) $p_i = c \cdot \frac{1}{2^i}$ für $i = 0, 1, \dots, n$
- e) $p_i = c \cdot \binom{n}{i}$ für $i = 0, 1, \dots, n$

Hinweise: Die folgenden Formeln können hilfreich sein.

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

10. Lösen Sie die Gleichung 1 aus Abschnitt 1 nach allen vorkommenden Variablen auf.

9 Lösungen

9.1 Lösungen der Aufgaben

1. a) $\frac{54}{a}$, $a \neq 0$, b) $\frac{7x^2 - 2xy}{3z + 5y}$, $3z + 5y \neq 0$, c) $\frac{7}{3}(a-b)$, d) $\frac{2(2x - 7y)}{2x + 7y}$, $2x + 7y \neq 0$
2. a) $\frac{11}{6}$, b) $3a$, c) $\frac{2x - 3y}{(x + 1)(y + 1)}$, d) $\frac{(a + b)^2}{2(a + 1)}$
3. a) $\frac{1}{12}$, b) 6 , c) $\frac{4}{21}y$, d) 2 , e) $\frac{a + b}{(a + 1)(b + 1)}$
4. a) a^6b^3 , b) $-(x - 1)^4$, c) -1 , d) $121ab^3$
5. a) 30 , b) -9 , c) $6|k|$, d) 9
6. a) $1'040$, b) 210 , c) $3'800$, d) $1'227$

9.2 Lösungen der Zusatzaufgaben

1. a) $\frac{5x - y}{3xy}$, $x, y \neq 0$, b) $x + y$, c) $\frac{z(x + 2y)}{x}$, $x \neq 0$, d) $\frac{2(3a + 4b)}{c(3a - 4b)}$, $c(3a - 4b) \neq 0$
2. a) $\frac{25}{24}$, b) $\frac{2(2a + 1)}{3(a + 1)(a + 2)}$, c) $\frac{3a - 14b^2 + 3a^2b^2}{6ab}$, d) $\frac{1}{3}(a + 2b)$
3. a) $\frac{(a + b)^2}{xy}$, b) $\frac{10(a^2b^2 + c)}{3a^2b^2}$, c) $\frac{5}{3}z$, d) $\frac{(2x - y)^2}{(2x + y)^2}$
4. a) $9x^3y^3z^3$, b) $(a - 1)^3$, c) xy , d) 0
5. a) 130 , b) -26 , c) $354'481$, d) 0
6. a) -54 , b) $\frac{19}{2}$, c) $\frac{9'555}{42'398}$, d) $\frac{n}{k}$
7.
$$1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^n (2i - 1) = \sum_{i=3}^{n+2} (2i - 5) = \sum_{i=5}^{n+4} (2i - 9) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = \sum_{i=0}^{n-1} (2i + 1) =$$

$$\sum_{i=-2}^{n-3} (2i + 5)$$
8. (a) 32.8% , (b) 0% bzw 46.3%
9. a) $c = \frac{1}{45}$, b) $c = \frac{2}{n(n + 1)}$, c) $c = \frac{6}{n(n + 1)(2n + 1)}$, d) $c = \frac{1}{2 - \frac{1}{2^n}}$,
e) $c = \frac{1}{2^n}$