

Bitte in Druckbuchstaben ausfüllen:

Name	
Vorname	

Statistik Probeproofung 2

- Zeit: 90 Minuten, Maximale Punktzahl: 72
- Zur Orientierung: mit 36 Punkten haben Sie **sicher** bestanden.
- Die Prüfung umfasst 12 Aufgaben (1 bis 12) und die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den eingerahmten Punktzahlen.
- Provisorische Berechnungen sind auf separaten Blättern auszuführen. Diese Blätter sind -als Entwurf gekennzeichnet- ebenfalls abzugeben.
- Manche Aufgaben können auf verschiedene Arten gelöst werden. Eventuell gibt es einen sehr einfachen Weg. Überlegen Sie (kurz), bevor Sie drauf los rechnen!
- Die definitive Lösung darf von jeder Aufgabe nur eine Version enthalten und hat direkt im Anschluss an diese Aufgabe (bzw. auf der Rückseite des entsprechenden Aufgabenblattes) zu erfolgen. Dabei sollten alle Rechenschritte klar ersichtlich sein, denn die „Qualität“ Ihrer Fehler wird bewertet. Ist die Antwort auf die Frage richtig und vollständig, erhalten Sie stets die volle Punktzahl.
- Bei den folgenden Fehlern erhalten Sie keine Punkte für die Aufgabe bzw. den Aufgabenteil:
 - eine Wahrscheinlichkeit < 0 oder > 1 oder eine negative Varianz (natürlich falsch) berechnet und nicht kommentiert;
 - Unabhängigkeit von Ereignissen bzw. Zufallsvariablen grundlos angenommen;
 - ein Summenzeichen bzw. Betragstriche (grundlos) weggelassen;
 - eine Gleichung durch eine Variable teilen, die Null sein könnte.
- Die ausgeteilten Formelsammlungen dürfen nicht beschriftet werden und sind ebenfalls mit der Prüfung abzugeben.

1. Anlässlich einer Schulstatistik wurde in einer Klasse das Alter der Schüler festgestellt. Von den 20 Schülern wurden folgende Zahlen genannt:

15 14 14 15 14 13 14 14 15 14
16 14 14 15 14 13 14 16 15 14

- (a) Bestimmen Sie die empirische Verteilungsfunktion F dieser Daten und skizzieren Sie den Graph von F . 4
- (b) Berechnen Sie $F(0)$ und $F(16)$. 2

Lösung:

2. (a) Ein Computerhersteller konnte seine Umsätze von 1990 im Jahr 1991 auf 108% gegenüber dem Vorjahr steigern. In den folgenden Jahren 1992-1995 gelang das gegenüber dem Vorjahr jeweils auf 102%, 108%, 111% und 105%. Bestimmen Sie den durchschnittlichen Wachstumsfaktor. 3
- (b) Eine Gemeinde besteht aus genau zwei Ortsteilen: dem Oberdorf mit genau 600 Einwohnern und dem Unterdorf mit genau 400 Einwohnern. Bei der Wahl zum Bürgermeister stimmen im Oberdorf genau 59% und im Unterdorf genau 70% für den Kandidaten I. Wieviel Prozent aller Einwohner der Gemeinde stimmen dann für den Kandidaten I? 3

Lösung:

3. (a) Gegeben seien die x -Werte $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 9$ und $x_4 = 11$. Bestimmen Sie **zwei** Reihen von y -Werten y_1, \dots, y_4 , so dass der Korrelationskoeffizient der Wertepaare $(x_1, y_1), \dots, (x_4, y_4)$ gleich -1 ist. 2
- (b) Seien x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n zwei Datenreihen. Beweisen Sie **Schritt für Schritt**, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}.$$

Dabei bezeichnen \bar{x} bzw. \bar{y} die jeweiligen arithmetischen Mittel. 4

Lösung:

4. (a) Wir betrachten die folgenden Daten.

3

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	-2.5	-1.5	-0.5	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5

Bestimmen Sie die Regressionsgerade zu diesen Daten und geben Sie falls nötig eine Begründung für das Resultat.

(b) Erläutern Sie kurz die Methode der kleinsten Quadrate (zur Konstruktion der Regressionsgeraden).

3

Lösung:

5. Der Umsatz $y_i = y(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 12$) einer Firma (in Mio. CHF) wird drei Jahre lang in jedem Quartal (kurz: Q) bestimmt. Nach Abzug der Werte einer Trendfunktion erhält man die folgende trendbereinigte Zeitreihe y_i^* ($i = 1, 2, \dots, 12$):

	2011				2012				2013			
Q	1-11	2-11	3-11	4-11	1-12	2-12	3-12	4-12	1-13	2-13	3-13	4-13
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i^*	1.0	-0.5	-1.2	0.0	0.5	0.6	-1.5	-0.1	1.2	0.6	-1.1	0.0

Dabei steht z.B. 1-12 für das erste Quartal im Jahr 2012.

- (a) Schätzen Sie für $k = 4$ die Werte S_1, S_2, \dots, S_{12} der zyklischen Komponente der Zeitreihe. 3
- (b) Bestimmen Sie (falls möglich) \hat{S}_{33} und \hat{S}_{34} . 3

Lösung:

6. (a) In einem Restaurant essen 20% der Gäste Vorspeise (kurz: V) und Nachtisch (kurz: N), 65% der Gäste nehmen keine Vorspeise und 30% der Gäste wählen einen Nachtisch.
- i. Sind die Ereignisse V und N unvereinbar? Begründung! 1
 - ii. Sind die Ereignisse V und N unabhängig? Begründung! 2
- (b) Für die beiden Ereignisse A und B gelte $P(A) = 0.8$ und $P(B) = 0.6$.
- i. Begründen Sie, dass $P(A \cup B) \geq 0.8$ gilt. 1
 - ii. Begründen Sie, dass $P(A \cap B) \geq 0.4$ gilt. 2

Lösung:

7. (a) Zwei Maschinen (A und B) produzieren in einer Fabrik denselben Artikel. Maschine A produziert 70% der Artikel; 8% der von A produzierten Artikel sind fehlerhaft, aber nur 6% der von Maschine B produzierten Stücke. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der Tagesproduktion gezogenes und **fehlerhaftes** Teil von Maschine A produziert wurde? 3
- (b) Berechnen Sie (allgemein) die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(U|V)$, wenn
- i. V eine Teilmenge von U ist, 2
 - ii. U und V sich gegenseitig ausschliessen. 1

Lösung:

8. Sei X eine Zufallsvariable mit $E(X) = 2$ und $Var(X) = 0.5$.

- (a) Erklären Sie, was man (allgemein) unter einer Zufallsvariablen versteht. 2
- (b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(0 < X < 4)$ mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschev (nach unten) ab. 2
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X^2 bzw. geben Sie eine Begründung an, warum dieser Wert nicht bestimmt werden kann. 2

Lösung:

9. (a) Sei X die Zufallsvariable mit der Verteilung

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	1/5	2/5	2/5

Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X > 2 | X > 1)$.

3

(b) In einer Urne befinden sich 18 gelbe und 10 blaue Kugeln. Es werden gleichzeitig (zufällig) drei Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um zwei gelbe und eine blaue Kugel handelt?

3

Lösung:

10. Seien X_1, X_2, \dots unabhängige und identisch (zweipunkt)verteilte Zufallsvariablen mit

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{mit } P(X_i = 0) = 1/3 \\ 2 & \text{mit } P(X_i = 2) = 2/3 \end{cases}$$

und sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen S_4 .

4

(b) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen S_n .

2

Lösung:

11. X_1, \dots, X_n seien unabhängige, identisch vert. Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Um μ zu schätzen, stehen zwei Funktionen zur Verfügung:

$$\bullet T_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

$$\bullet T_2 = \frac{1}{2(n-2)} \sum_{i=1}^{n-2} X_i + \frac{1}{4}X_{n-1} + \frac{1}{4}X_n$$

(a) Untersuchen Sie beide Schätzfunktionen auf Erwartungstreue.

3

(b) Untersuchen Sie beide Schätzfunktionen auf Konsistenz.

3

Lösung:

12. Bei der Massenproduktion eines Produktes treten immer wieder unbrauchbare Stücke auf. Der Produzent versichert, dass ihr Anteil p nicht mehr als 10% beträgt. Eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ ergab 3 unbrauchbare Produkte. Sie wollen diese Behauptung durch einen geeigneten Test prüfen.

(a) Formulieren Sie H_0 und H_1 .

2

(b) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

3

(c) Sollte man H_0 ablehnen?

1

Lösung: