WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHES ZENTRUM (WWZ)
DER UNIVERSITÄT BASEL

Dezember 2006

I. Vincenz Bronzins Optionspreismodelle in theoretischer und historischer Perspektive (Page 2-28)

II. Amazing discovery: Vincenz Bronzin's Option Pricing Models (Page 29 – 52)

V 5/06

Heinz Zimmermann, Wolfgang Hafner

WWZ Forum, Petersgraben 51, CH - 4003 Basel
Fax +41 61 267 33 33 | e-mail: forum-wwz@unibas.ch | www.wwz.unibas.ch/forum

The Authors:

Wolfgang Hafner

Department of Finance

University of Basel

Holbeinstrasse 12, CH-4003 Basel

whafner@wolfgang-hafner.ch

Prof. Dr. Heinz Zimmermann

Department of Finance

University of Basel

Holbeinstrasse 12, CH-4003 Basel

heinz.zimmermann@unibas.ch

Kontakt- und Bestelladresse
WWZ Forum, Petersgraben 51, CH-4003 Basel Fax +41 61 267 33 33, forum-wwz@unibas.ch

Eine Veröffentlichung des
Wirtschaftswissenschaftlichen Zentrum (WWZ) der Universität Basel

Die Publikation wird durch die freundliche Unterstützung des Vereins zur Förderung des WWZ ermöglicht.

Vinzenz Bronzins Optionspreismodelle in theoretischer und historischer Perspektive

Von Heinz Zimmermann und Wolfgang Hafner*

Was seit 1973 als Durchbruch in der Optionspreistheorie gilt und im Jahre 1997 mit dem Wirtschafts-Nobelpreis ausgezeichnet wurde, hat der Österreicher *Vinzenz Bronzin* 65 Jahre früher – im Jahr 1908 – umfassender, einfacher verständlich und notabene: auf deutsch in einer kurzen Monografie niedergeschrieben. Diese geriet aber spätestens in den zwanziger Jahren in völlige Vergessenheit. Im vorliegenden Beitrag kann nicht auf die vielfältigen Aspekte von *Bronzins* Arbeit eingetreten werden. Im Vordergrund steht seine Preisbildungsformel für Optionen, welche auf dem „Fehlergesetz" (d.h. Normalverteilung) beruht und damit einen direkten Bezug zur Black-Scholes Formel erlaubt (Abschnitte I. und II.); ein vereinfachter Ansatz für die Optionsbewertung (Abschnitt III.); einen Überblick über die verschiedenen Verteilungsannahmen seiner Optionsmodelle (Abschnitt IV.) sowie seine Version der Put-Call-Parität (Abschnitt V.). Zudem stellen wir seine Arbeit kurz in den wirtschaftlichen und gesellschaftspolitischen Kontext der Zeit, namentlich seines Arbeitsumfeldes an der Akademie in Triest (Abschnitte VI. und VII.). Schliesslich stellen wir seine Arbeit in den Kontext anderer Optionspreismodelle der Vor-Black-Scholes-Periode (Abschnitt VIII.).

Hartmut Schmidt hat den historischen und institutionellen Fragen der derivativen Märkte stets eine grosse Bedeutung zugemessen; so war es nicht erstaunlich, dass *Bronzins* Arbeit von Anfang an sein Interesse weckte und er diese den Studierenden zugänglich machte[1]. Besonders nützlich erweist sich in diesem Zusammenhang die Klassifikation der Termingeschäfte[2] in

---

* Wir danken dem WWZ-Förderverein für die finanzielle Unterstützung unter dem Projekt Nr. B-86 und Yvonne Seiler für wertvolle Kommentare.

[1] Eine Seminararbeit von *A. Hochstein/A. Swart* zeigt beipielsweise interessante Beziehungen zwischen der Arbeit von *Stoll* (1969) zur Put-Call-Parität, der Umwandlung der Prämiengeschäfte bei *Sommerfeld* (1926) und der Analyse der Deckungsverhältnisse bei *Bronzin* (1908).

[2] An dieser Stelle muss auf eine im deutschen und schweizerischen Sprachraum abweichende Terminologie hingewiesen werden: Unter Termingeschäft (früher auch „Zeitgeschäft") versteht man in Deutschland meistens die Gesamtheit jener Geschäfte, welche im schweizerischen Sprachraum als „Derivate" bezeichnet werden. Der Begriff des Termingeschäfts beschränkt sich im schweizerischen Sprachraum

Schmidt (1978, 1988), wonach u. a. Fest-, Prämien-, Options-, Noch- und Stellagegeschäfte aufgrund zweier einfacher Kriterien (Wahlmöglichkeit hinsichtlich des Erfüllungszeitpunktes sowie bei der Art der Erfüllung) in ein einfaches Raster eingeordnet werden können. Im vorliegenden Beitrag vergleichen wir *Bronzins* Prämiengeschäfte, welche stets am gleichen Tag wie die mit ihnen verbundenen Festgeschäfte zu erfüllen sind, mit *europäischen,* d.h. nur im Fälligkeitszeitpunkt ausübbaren Optionsgeschäften. Dies erlaubt einen direkten Vergleich zwischen *Bronzins* Prämienbewertungsmodell und dem Black-Scholes-Modell für europäische Optionen.

Die Autoren des vorliegenden Beitrags haben schliesslich von konstruktiven Kommentaren des Geehrten zu *Zimmermann/Hafner* (2004) erheblich profitiert.

I. *Bronzins* Version der „Black/Scholes"-Formel

Sie sieht zwar unspektakulär aus, die Gleichung (43) auf Seite 76 im schmalen Büchlein mit dem Titel „Theorie der Prämiengeschäfte", welches 1908 im österreichischen Karl-Deuticke-Verlag erschienen ist. Hinter der Gleichung verbirgt sich, aus heutiger Sicht in etwas ungewohnter Notation[3], die berühmte Black-Scholes Formel, welche als eine der zentralen Errungenschaften der Finanzmarkttheorie betrachtet wird und als eine der meistzitierten wirtschaftswissenschaftlichen Arbeiten gilt. Der *erste* Term bezeichnet den erwarteten Ausübungserlös der Option (gegenüber dem Terminkurs), konditioniert auf die tatsächliche Ausübung der Option bei Verfall. Der *zweite* Term zeigt den Ausübungspreis (abzüglich Terminkurs) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit der Optionsausübung.

Drei Unterschiede sind gegenüber dem Black-Scholes-Modell hervorzuheben:

- *Bronzin* betrachtet die absoluten Kursschwankungen, nicht deren Logarithmen, d.h. er unterstellt für x eine Normalverteilung anstelle einer Lognormalverteilung. Dies führt zum bekannten Problem, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Marktpreise der Basisanlage auftreten. *Bronzin* ist sich dieses Problems jedoch bewusst und weist ausdrücklich darauf hin[4] – es spielt im Rahmen seines Modellansatzes jedoch nicht eine so entscheidende Rolle[5].

---

dagegen i. d. R. auf das Fest- oder Fixgeschäft *(forward contract)* deutscher (angloamerikanischer) Prägung.

[3] Im vorliegenden Beitrag wird die Notation von *Bronzin* weitgehend übernommen. Abweichungen oder Ergänzungen sind speziell erwähnt.

[4] Er schreibt: „... es könnte ja eine Kurserhöhung in unbeschränktem Masse stattfinden, während offenbar eine Kurserniedrigung höchstens bis zur Wertlosigkeit des Objekts vor sich gehen kann" (p. 56).

Die Prämie P_1 berechnen wir diesmal lieber aus seinem Integral

$$P_1 = \int_M^\infty (x - M) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} d\,x,$$

nämlich

$$P_1 = \int_M^\infty \frac{h}{\sqrt{\pi}} x\, e^{-h^2 x^2} d\,x - M \int_M^\infty \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} d\,x;$$

das erste Integral läßt sich unmittelbar auswerten, das zweite aber durch die Funktion ψ ausdrücken; es ergibt sich

$$P_1 = \frac{e^{-M^2 h^2}}{2\,h\sqrt{\pi}} - M\,\psi\,(h\,M). \tag{43}$$

- P_1: Preis einer Calloption mit einem Ausübungspreis, der im Umfang von M über dem Terminkurs (B) liegt.
- x: Abweichung des Kassakurses vom Terminkurs.
- h: Kehrwert der (mit Wurzel 2 multiplizierten) Standardabweichung der absoluten Preisabweichungen der Basisanlage vom Terminkurs bei Verfall.
- $\psi(hM)$: Normalverteilungsabschnitt, der die Ausübungs-Wahrscheinlichkeit der Option zeigt; dabei wird als Erwartungswert des Kassakurses bei Verfall der Terminkurs verwendet.

Abbildung 1: Die Bronzinsche Optionspreisformel, basierend auf dem Fehlergesetz (Normalverteilung)

- *Bronzin* modelliert keinen stochastischen Prozess für den zugrundeliegenden Marktpreis, sondern modelliert direkt dessen Verteilung im Fälligkeitszeitpunkt. Dies bedeutet keineswegs, dass er die Bedeutung der Stochastik des Kursprozesses verkannt hätte (er weist sogar ausdrücklich auf die Zufälligkeit der Preisbewegungen hin) – er wählt einfach einen pragmatischeren Ansatz. Es ist im Rahmen seines Ansatzes auch völlig irrelevant, in welchem Verhältnis der Erwartungswert des Prozesses zum heutigen Kurs steht – er setzt den Erwartungswert der Verteilung gleich dem Terminkurs. Zudem unterstellt er eine Verzinsung von Null[6], so dass die Zeitdimension in seinem Modell völlig entfällt.

[5] Der Grund liegt darin, dass er im allgemeinen Teil seiner Bewertungstheorie (2. Teil, 1. Kapitel) für negative und positive x-Werte (also Kurse unter- und oberhalb des Terminkurses) zwei unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen unterstellt, deren Wertebereich durchaus (nach unten) beschränkt sein kann. Zudem ist die Normalverteilung (Fehlergesetz genannt) sowieso nur eine von mehreren Spezifikationen, welche er für die Verteilung von x analysiert.

- Konsistent mit dem letzten Punkt treten in der Formel nicht der heutige Marktpreis und dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Verfall auf, sondern der Terminkurs (B) und die Verteilung der *Abweichungen* zwischen Marktpreis und Terminkurs bei Verfall ($\tilde{x}$); ebenso ist der Ausübungspreis M als Differenz gegenüber dem Terminkurs definiert.

Der *erste* Punkt ist ein nicht vernachlässigbarer Unterschied – ermöglicht aber trotzdem einen direkten Vergleich der beiden Formeln (siehe Abschnitt II. und Anhang 1). Der *dritte* Punkt ist ein rein formeller Unterschied – es macht das Modell von *Bronzin* äquivalent zu jenem von *Black* (1976), wo als triviale Erweiterung von Black-Scholes ebenfalls Optionen auf der Grundlage von Terminkursen bewertet werden. Der zweite Punkt bedeutet im wesentlichen, dass *Bronzin* auf die zeitliche Dimension der Volatilität (Quadratwurzelformel) und jegliche Abdiskontierung verzichtet.

II. Formale Äquivalenz zum Black-Scholes-Modell

Die entscheidende Übereinstimmung zwischen *Bronzin* und Black-Scholes liegt im risikoneutralen – und zwar spezifisch: präferenzfreien – Bewertungsansatz. In der konsequenten Verwendung des Terminkurses anstelle des statistischen Erwartungswertes liegt der entscheidende Schlüssel dafür, dass für die Berechnung des Optionspreises keine präferenzabhängigen Parameter (Erwartungswerte, Risikopräferenzen, Risikoprämien) benötigt werden. Darin liegt der Durchbruch und Unterschied des Black-Scholes-Modells gegenüber früheren Optionspreismodellen (siehe Abschnitt VIII.) – aber nicht gegenüber *Bronzin*[7].

Das Black-Scholes-Modell war nicht die erste Formel, welche für die Bewertung von Optionen entwickelt wurde – wohl aber die berühmteste und nützlichste. Letzteres deshalb, weil der Optionspreis ausschliesslich aufgrund von Inputgrössen berechnet werden kann, welche nicht von subjektiven Einschätzungen (Präferenzen) abhängig sind: Preiserwartung, Risikoprämien oder Risikobereitschaft. Es wird lediglich unterstellt, dass die Vola-

---

[6] *Hartmut Schmidt* hat uns darauf hingewiesen, dass die Vernachlässigung der Zeitdimension möglicherweise nicht mit der Annahme eines Zinssatzes von Null begründet werden kann, sondern mit der möglichen damaligen Usanz, dass die Prämie erst bei Fälligkeit des Kontrakts zu bezahlen war; zumindest bei den bei *Sommerfeld* (1926) analysierten Kontrakten scheint dies zuzutreffen. Da sich *Bronzin* auf keinen spezifischen Termin- resp. Prämienkontrakt bezieht, lässt sich dieser Punkt kaum überprüfen.

[7] Dabei ist es nicht erheblich, ob *Bronzin* glaubt, dass der Terminkurs mit dem erwarteten Kurs übereinstimmt oder nicht (einige diesbezügliche Andeutungen findet man durchaus) – wichtig ist, dass dieser Erwartungswert in der Formel nirgends auftritt.

tilität (also die Standardabweichung der relativen Kursveränderungen) konstant und objektiv berechenbar ist.

Genau diese Eigenschaft weist *Bronzins* Formel ebenfalls auf. Die Parallelität ist geradezu überraschend. Während beim Black-Scholes-Modell die risikoneutrale Bewertung durch den heutigen Aktienkurs S_0 und den risikolosen Zinssatz r gewährleistet ist, beruht das *Bronzin*-Modell in völlig äquivalenter Weise direkt auf dem Terminkurs B.[8] Grundlage für diesen Bewertungsansatz bildet seine „Bedingung der Rechtmässigkeit" (p. 43), welche darin besteht,

> „... dass im Moment des Abschlusses eines jeden Geschäfts beide Kontrahenten mit ganz gleichen Chancen dastehen, so dass für keinen derselben im voraus weder Gewinn noch Verlust anzunehmen ist; wir stellen uns also jedes Geschäft unter solchen Bedingungen abgeschlossen vor, [...] dass der gesamte Hoffnungswert des Gewinns für beide Kontrahenten der Null gleichkommen müsse" (p. 42).

Diese Bedingung bildet die Grundlage für die Herleitung sämtlicher Bewertungsgleichungen (siehe *Bronzin,* pp. 39–46). Mit $f(x)$ bezeichnet *Bronzin* die Dichtefunktion der Differenz zwischen Kassakurs bei Optionsverfall nachfolgend ($\tilde{S}_T$) und heutigem Terminkurs (B), $\tilde{x} \equiv \tilde{S}_T - B$; und mit M notiert er die Abweichung des Ausübungspreises (nachfolgend K) vom Terminkurs, $M \equiv K - B$. Seine Bewertungsgleichung für Calloptionen lautet

$$P_1 = \int_M^\infty (\tilde{x} - M)\, f(x)\, dx = \int_M^\infty \tilde{x}\, f(x)\, dx - M \int_M^\infty f(x)\, dx \tag{1}$$

(siehe *Bronzin,* p. 46). Aufgrund der spezifischen Annahmen von Bronzin (ein Zinssatz von Null sowie eine Preisverteilung mit einem präferenzfreien Erwartungswert) handelt es sich im modernen Wortsinn um eine „risikoneutrale" Dichtefunktion, welche direkt als *pricing density* (d.h. als Dichtefunktion der Zustandspreise[9]) interpretiert werden kann. Die äquivalente Formel für Putoptionen erreicht er über die Put-Call-Parität (siehe Abschnitt 5) in Gleichung (13).

Im Zentrum des 2. Teils von *Bronzins* Arbeit bilden unterschiedliche Annahmen zur Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$; in Abschnitt 3 und Darstellung (2) liefern wir eine Übersicht. Im vorliegenden Abschnitt interessiert lediglich die Annahme des „Fehlergesetzes", heute als Normalverteilung bezeichnet, und die daraus abgeleitete Optionspreisformel (43). Demgegen-

---

[8] Man beachte, dass unter Vernachlässigung von Dividendenzahlungen der arbitragefreie Terminkurs durch $B = S_0 e^{rT}$ bestimmt ist.

[9] Ein Zustandspreis (*state price*) zeigt den heutigen Preis einer in einem spezifischen zukünftigen Zustand anfallenden Geldeinheit; im vorliegenden Fall wird eine stetige Dichtefunktion unterstellt, was ein Kontinuum möglicher Zustände bedeutet.

über wird bei Black-Scholes für $f(x)$ eine Lognormalverteilung unterstellt[10]. Dies führt zu einem interessanten analytischen Unterschied beim ersten der beiden Integrale in (1); *Bronzin* kann nämlich auf diese Weise das erste der beiden Integrale gemäss

$$(2)\qquad \int_M^\infty \tilde{x}\, f(x)dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_M^\infty \tilde{x}\; e^{-h^2x^2} dx = \frac{e^{-M^2h^2}}{2h\sqrt{\pi}},$$

auflösen, was im Falle einer Lognormalverteilung für $f(x)$ nicht möglich ist. In der Notation des Black-Scholes Modells lautet die Bewertungsgleichung (1)

$$(3)\qquad P_1 = \int_K^\infty (\tilde{S}_T - K)\, f(S_T)\; dS_T$$

worin $f(S_T)$ die (risikoneutrale) Dichte des lognormalverteilten Aktienkurses bezeichnet; auf eine (risikolose) Abdiskontierung wird zur Wahrung der Übereinstimmung mit *Bronzin* verzichtet. Das erste Integral lautet

$$(4a)\qquad P_1 = \int_K^\infty \tilde{S}_T\, f(S_T)\; dS_T$$

und kann in risikoneutraler Form und in Abhängigkeit der standardnormalverteilten Dichte $N'(z)$ geschrieben werden als[11]

$$(4b)\qquad P_1 = S_0 \int_{-z_2}^\infty e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\tilde{z}} N'(z)\; dz = S_0\; N(z_2 + \sigma)$$

$$\text{mit}\qquad z_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \quad \text{resp.}\quad z_2 + \sigma = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

ist. Es handelt sich um den bekannten Standardnormalverteilungsabschnitt des Black-Scholes-Modells. Details zu den analytischen Eigenschaften der Integrale findet man in tabellarischer Form in Anhang 1.

---

[10] Zur Vereinfachung abstrahieren im Folgenden von der zeitlichen Dimension der Momente (der Varianz) der Verteilung, oder setzen vereinfachend die Laufzeit gleich eins, $\sigma^2 T = \sigma^2$.

[11] Die risikoneutrale Verteilung des lognormalverteilten Aktienkurses lautet $\tilde{S}_T = S_0 e^{r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma z} = B e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\tilde{z}}$ bei $r = 0$ und $S_0 = B$.

Das zweite Integral – die risikoneutrale Ausübungswahrscheinlichkeit der Option – weist bei *Bronzin* die Lösung

$$(5) \qquad \int_{M}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{M}^{\infty} e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{hM}^{\infty} e^{-t^2} dt \equiv \psi(hM)$$

auf; einige Werte sind im Anhang zu *Bronzins* Buch tabelliert. In der Notation des Black-Scholes-Modells hat das Integral die Form

$$(6) \qquad \int_{K}^{\infty} f(S_T)\,dS_T = pr(\tilde{S}_T > K) = \int_{-\infty}^{z_2} f(z)\,dz \equiv N(z_2)$$

mit der vorher dargestellten Integrationsgrenze. Entscheidend für die Äquivalenz der beiden Bewertungsansätze ist, dass zwischen den Ausdrücken (5) und (6) ein direkter Zusammenhang besteht, welcher durch

$$(7a) \quad \psi(hM) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{hM}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_2 = M/\sigma(x)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_2 = -M/\sigma(x)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

gegeben ist. Die Integrationsgrenze kann gemäss

$$(7b) \quad \begin{aligned} z_2 &= -\frac{M}{\sigma(x)} = -\frac{K-B}{B\sigma} = -\frac{\frac{K}{B} - 1}{\sigma} \approx -\frac{\ln\frac{K}{B} + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \\ &= \frac{\ln\frac{B}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \end{aligned}$$

transformiert werden, womit die Identität der Integrale (5) und (6) – also der risikoneutralen Ausübungswahrscheinlicheiten – bis auf die Approximation $\frac{K}{B} - 1 \approx \ln\left(\frac{K}{B}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2$ gezeigt ist. Im Appendix 1 findet man eine Gegenüberstellung der analytischen Elemente der beiden Lösungsansätze.

III. Alternative Verteilungsannahmen

Bronzin ermittelt Optionspreise für unterschiedliche Verteilungsannahmen des Marktpreises bei Verfall – die Normalverteilung, welche zur vorher gezeigten Äquivalenz mit der Black-Scholes-Formel führt, ist nur eine von sechs unterschiedlichen Spezifikationen. Eine Übersicht über die anderen Verteilungen liefert Abbildung 2.

Die ersten drei Verteilungen (Gleich-, Dreiecks- und parabolische Verteilung) stellen zugegebenermassen äusserst einfache Spezifikationen der Dichtefunktion dar, man könnte sogar vermuten, dass sie *Bronzin* nur aus didaktischen Gründen präsentiert. Doch ist überraschend, dass bereits die dritte dieser Verteilungen trotz ihrer analytischen Einfachheit eine hervorragende Annäherung an die drei verbleibenden, „realistischeren" Verteilungen liefert. Auch ist zu erwähnen, dass sämtliche der von *Bronzin* analysierten Verteilungen Spezialfälle einer verallgemeinerten Klasse von Fehlerverteilungen, der sog. Pearson-Fehlergesetze, darstellen (siehe *Zimmermann/Hafner* 2004).

Bei den drei anderen Verteilungen (Exponential-, Normal- und Binomialverteilungen) handelt es sich um Spezifikationen, welche beliebig hohe und tiefe Marktpreise (mit entsprechend niedrigen Wahrscheinlichkeiten) ermöglichen[12]. Was *Bronzin* als „Fehlergesetz" beschreibt, ist in heutiger Terminologie die Normalverteilung mit einem Erwartungswert von Null und einer Standardabweichung von

$$\sigma_{err}(x) = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

worin h ein Mass für die Präzision der Beobachtungen darstellt. Der Begriff „Normalverteilung" wurde von führenden Statistikern bereits in den 90er Jahren des vorletzten Jahrhunderts verwendet – grössere Verbreitung fand er jedoch erst in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts. Interessant (im Hinblick auf das spätere Binomialmodell von *Cox/Ross/Rubinstein* 1979) ist jedoch, dass *Bronzin* auch die Binomialverteilung als Modell für den Marktpreis bei Fälligkeit betrachtet – aber sich im wesentlichen auf den Nachweis beschränkt, dass unter geeigneten Konvergenzbedingungen (Approximationen) die Formel für die Fehlerverteilung verwendet werden kann, wobei die Standardabweichung (resp. die Konstante h des Fehlergesetzes) durch einen spezifischen Wert zu ersetzen ist (siehe Abbildung 2, letzte Zeile).

[12] Da sich die Verteilungen direkt auf den Kurs (nicht auf dessen Logarithmus) beziehen, führt dies zur Problematik der negativen Preise, auf welche *Bronzin* ausdrücklich hinweist.

	Dichtefunktion	Volatilität	Call-Preis
Gleich-verteilung	$f(x) = \frac{1}{2\omega}$, $x \in [-\omega; +\omega]$		$P_1 = \frac{(\omega - M)^2}{4\omega}$
Dreiecks-verteilung	$f(x) = \frac{\omega - x}{\omega^2}$, $x \in [-\omega; +\omega]$		$P_1 = \frac{(\omega - M)^3}{6\omega^2}$
Parabolische Verteilung	$f(x) = \frac{3(\omega - x)^2}{2\omega^3}$, $x \in [-\omega; +\omega]$		$P_1 = \frac{(8\omega - M)^4}{8\omega^3}$
Exponential-verteilung	$f(x) = ke^{-2kx}$	$\sigma_{\exp}(x) = \frac{1}{2k}$	$P_1 = \frac{e^{-2kM}}{4k}$
Fehlerverteilung (Normal-verteilung)	$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$	$\sigma_{err}(x) = \frac{1}{h\sqrt{2}}$	$P_1 = \frac{e^{-M^2 h^2}}{2h\sqrt{\pi}} - M\,\psi(hM)$
Bernoulli-Verteilung (Binomial-verteilung)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z*} e^{-1/2\, z^2} dz + \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Bq}}$ $z* = \frac{x*}{\sqrt{Bq}}, \tilde{z} = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{Bq}}$	$\sigma_{bin}(x) = \sqrt{qB}$	

Abbildung 2: Alternative Verteilungsannahmen in *Bronzin* (1908)

Im einzigen uns bekannten Beitrag, der in analytischer Hinsicht auf die Arbeit von *Bronzin* Bezug nimmt[13], liefert *Flusser*[14] (1911) Optionspreise für eine Reihe weiterer Verteilungen, welche durchwegs in Form von Funktionen beschrieben werden (rational algebraische Funktionen, irrationale Funktionen, goniometrische Funktionen, logarithmische Funktionen etc.);

[13] Wir danken *Ernst Jürg Weber* von der School of Economics and Commerce an der University of Western Australia, Crawley, der uns auf diese Arbeit aufmerksam gemacht hat.

[14] *Gustav Flusser* war Professor für Mathematik an der Karlsuniversität in Prag, galt als linker Intellektueller und war von 1918 bis 1924 sozialdemokratischer Parlamentsabgeordneter der neu gegründeten tschechoslowakischen Republik.

einen praktischen Bezug resp. eine statistische Begründung dieser Spezifikationen liefert der Autor nicht.

IV. *Bronzins* vereinfachter Optionsbewertungsansatz

Ein zentrales Ergebnis des allgemeinen Bewertungsteils stellt die Erkenntnis dar, dass für die Ermittlung des Optionspreises anstelle der Lösung der Bewertungsintegrale (1) ein in vielen Fällen vereinfachtes Vorgehen möglich ist. Dieser Ansatz ist in jeder Hinsicht beachtenswert, da die zugrunde liegende Analytik erst in einigen Arbeiten in den 70er Jahren (in einer nicht publizierten Arbeit von *Black* 1974 und später von *Breeden/Litzenberger* 1978) erkannt wurde.

Konkret erkennt *Bronzin,* dass die erste (und zweite) Ableitung des Optionspreises in Bezug auf den zugrunde liegenden Ausübungspreis in einer direkten Beziehung zur Verteilungs- (resp. Dichte)funktion, welche für die Bewertung benötigt wird, steht. Bezeichnet $F(x = M) \equiv F(M)$ die Wahrscheinlichkeit, dass $\tilde{x}$ über M liegt, dann lässt sich der Optionspreis als *un*bestimmtes Integral

$$P_1 = -\int F(M)\, dM + C \tag{8}$$

ermitteln – was gegenüber dem konventionellen Bewertungsansatz meistens eine erhebliche Vereinfachung darstellt. Dies soll an einem einfachen, von *Bronzin* übernommenen Beispiel gezeigt werden: der Dreiecksverteilung (*Bronzin* 1908, p. 61). Die Dichtefunktion ist durch

$$f(x) = \frac{\omega - x}{\omega^2}$$

gegeben. Der konventionelle Bewertungsansatz erfordert die Lösung des Integrals

$$P_1 = \int_M^\omega (x - M) f(x)\, dx = \int_M^\omega (x - M) \frac{\omega - x}{\omega^2}\, dx$$

was nicht trivial ist (siehe p. 66). Das vorher skizzierte Vorgehen führt hingegen zur folgenden Lösung: Zunächst benötigt man die Wahrscheinlichkeit, dass $\tilde{x}$ über $x = M$ liegt; diese beträgt $\frac{(\omega - M)^2}{2\omega^2}$. Sodann muss lediglich noch $\frac{\partial P_1}{\partial M} = -F(M) = -\frac{(\omega - M)^2}{2\omega^2}$ nach dem Optionspreis P_1 aufgelöst werden, d.h. das unbestimmte Integral während aus einer zweiten Differentiation die von Integralen ganz freie Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial M^2} = f(M), \tag{17}$$

resultiert. Umgekehrt folgt aus

$$\frac{\partial P_1}{\partial M} = -F(M) \tag{18}$$

durch Integration

$$P_1 = -\int F(M)\,d\,M + C, \tag{19}$$

wodurch die Bestimmung von P_1 in Funktion von M auf ganz andere Weise als durch direkte Auswertung seines Integrals vor sich gehen kann, was je nach der Form der Funktion $f(x)$ von sehr großem Vorteile sein könnte. Die Konstante C läßt sich leicht aus der Bedingung ermitteln, daß für $M = \infty$ auch die Prämie P_1, wie es die Gleichung (12) lehrt, verschwinden muß.

Abbildung 3: *Bronzins* vereinfachte Version
der allgemeinen Bewertungsgleichung für Optionen

$$P_1 = -\int F(M)\,dM + c = -\int \frac{(\omega - M)^2}{2\omega^2}\,dM + C$$

ermittelt werden. Die Lösung ist $P_1 = \frac{(\omega - M)^3}{6\omega^2}$; die Konstante entfällt aufgrund von $P_1(M = \infty) = 0$. Eine wahrlich elegante Lösung!

V. Put-Call-Parität

Zu den interessantesten Teilen von *Bronzins* Arbeit gehört die Put-Call-Parität, welche er aus einem allgemeinen „Deckungserfordernis", dem die Gesamtheit der „Wahl- und Zwangsgeschäfte" (d.h. die gekauften und verkauften Optionen sowie die Termingeschäfte) genügen müssen, ableitet. Wenn auch sich der dafür verwendete analytische Apparat ziemlich aufwändig ausnimmt, handelt es sich dabei um eine frühe und ebenso klare Darstellung der grundlegenden Elemente der Arbitragebewertung. Mit dem Prinzip der „Deckung" von Geschäften charakterisiert er einen „perfekten Hedge":

> „Wir werden einen Komplex von Geschäften dann als gedeckt betrachten, wenn bei jeder nur denkbaren Marktlage weder Gewinn zu erwarten noch Verlust zu befürchten ist." (p. 7)

während er mit dem Prinzip der „Äquivalenz“ von Geschäften das Prinzip der Replikation beschrieben wird:

> „Zwei Systeme von Geschäften nennen wir nämlich dann einander äquivalent, wenn sich das eine aus dem anderen ableiten lässt, in anderen Worten, wenn dieselben bei jeder nur dankbaren Lage des Marktes einen ganz gleichen Gewinn resp. Verlust ergeben“ (p. 10).

Der Zusammenhang zwischen den beiden Prinzipien ergibt sich nahe liegender weise daraus,

> „[...] dass wir sofort zwei Systeme äquivalenter Geschäfte erhalten, wenn wir nur in einem Komplexe gedeckter Geschäfte einige derselben mit entgegengesetzten Vorzeichen betrachten“ (p. 10).

Auch wenn der Begriff der „Arbitrage“ an keiner Stelle ausdrücklich auftritt[15], gewinnt er aus diesen Prinzipien die Preisbeziehung zwischen Call- und Putoptionspreisen. Im deutschen Sprachraum findet man bei *Sommerfeld* (1926) eine ausführliche Diskussion der Beziehungen zwischen Prämien- und Festgeschäften, und die klassische Referenz für die Parität ist *Stoll* (1969). *Bronzin* liefert zwei diesbezügliche Ausdrücke: Für „symmetrische“ Geschäfte (Ausübungspreis der beiden Optionen entspricht dem Terminkurs) findet er die Übereinstimmung zwischen von Call- und Putoptionspreis (P_1, P_2)

$$P_2[K = B] = P_1[K = B] \tag{9a}$$

(siehe Gleichung 4, p. 8). Für „schiefe Geschäfte“ (Ausübungspreis der beiden Optionen weichen vom Terminkurs ab) findet er die Beziehung

$$P_2[K = B + M] = P_1[K = B + M] + M \tag{9b}$$

(siehe Gleichung 4, p. 17): die *moneyness* der (einen) Option M – die (positive) Differenz zwischen dem Ausübungspreis und dem Terminkurs – entspricht exakt der Differenz zwischen den beiden Optionspreisen. Den Bezug zur heute gebräuchlichen Schreibweise der Put-Call-Parität gewinnt man einfach, indem die *moneyness* der Option um den Zeitwert des Geldes ergänzt wird,

$$\hat{M} \equiv Ke^{-rT} - S_0, \tag{10a}$$

[15] Interessanterweise hat derselbe Autor im Jahre 1904 einen didaktischen Aufsatz zum Thema „Arbitrage“ publiziert (siehe *Bronzin* 1904), sich dort jedoch weitgehend mit praktischen Aspekten der Währungsarbitrage auseinandergesetzt. Es scheint, dass der Begriff im allgemeinen Wortsinn oder im Zusammenhang mit Prämiengeschäften noch nicht gebräuchlich war.

und der Ausdruck nach dem Ausübungspreis

$$K = (S_0 + \hat{M})e^{rT} = B + \hat{M}e^{rT}$$

aufgelöst wird. Eingesetzt in Bronzins Parität (9b) resultiert

$$P_2[K] = P_1[K] + Ke^{-rT} - S_0, \tag{10b}$$

die heute gebräuchliche Version der Put-Call-Parität.

VI. Zum wirtschaftlichen und gesellschaftspolitischen Hintergrund

Nachdem einige zentrale analytische Aspekte von *Bronzins* Arbeit diskutiert wurden, stellt sich die zentrale und wissenschaftstheoretisch interessante Frage, vor welchem Hintergrund seine Überlegungen zur mathematischen Bewertung von Optionen zu verstehen sind und worin die Motivation zu deren Publikation liegen könnte. Persönlich soll er – laut der Aussage seines Sohns *Andrea*[16] – nie mit Wertpapieren gehandelt haben noch in irgendeinem Unternehmen gearbeitet haben, das mit Wertpapieren oder anderen Gütern handelte. Der 1872 in Rovigno (Istrien) geborene *Bronzin* unterrichtete in Triest – die Stadt gehörte damals zur österreichisch-ungarischen Doppelmonarchie – als Professor an der Handels- und Nautischen Akademie das Fach „Politische Arithmetik“. Politische Arithmetik war praktische Versicherungsmathematik und umfasste beispielsweise die Berechnung von Prämien für Lebensversicherungen.

Sein mathematisch-wahrscheinlichkeitstheoretisches Rüstzeug holte sich *Bronzin* bei *Ludwig Boltzmann,* dem um die Wende vom 19. ins 20. Jahrhundert führenden Physiker in Wien. *Bronzin* besuchte in den Jahren 1894–96 Vorlesungen und Seminare zur Wärmelehre, analytischen Mechanik und Gas-Theorie bei *Boltzmann*. Dessen Leistung bestand unter anderem darin, die kinetische Gas-Theorie von *Maxwell* mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verbinden. Auf dieser Grundlage entwickelte *Boltzmann* ein mathematisches Modell, das auf der Ebene der Moleküle und Atome das Verhalten von Materie beschreibt. Für diese kleinsten Teilchen sind verschiedene Zustände möglich: Atome oder Moleküle können sich wild durcheinander bewegen, oder – sehr unwahrscheinlich – sie können sich alle in die gleiche

[16] Die Autoren hatten die Gelegenheit, im März 2005 mit *Andrea Bronzin,* der im Hause seines Vaters ausserhalb von Triest wohnte, ein längeres Gespräch zu führen. Bei der Niederschrift dieses Beitrags erfahren wir, dass er im Alter von 94 Jahren gestorben ist.

Richtung bewegen. *Boltzmann* hat die Wahrscheinlichkeit verschiedener Zustände in eine Formel gefasst und so die mathematische Begründung für den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik („Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu") mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie geliefert.[17] Erstaunlich ist vor diesem Hintergrund, dass *Bronzin* für das Verhalten des zu Grunde liegenden Marktpreises der Optionen – im Gegensatz zu *Bachelier* – nicht eben dieses Modell heranzog, sondern auf der Basis des Terminkurses eine (wie in Abschnitt IV. gezeigt, unterschiedlich spezifizierte) statische Verteilung unterstellte[18].

Bronzin unterrichtete in einem wirtschaftlichen Umfeld, dem das Denken in statistischen Kategorien geläufig war, und das sich zumindest theoretisch auch für Termingeschäfte aller Art interessierte. Die kaiserliche und königliche Handels- und Nautische Akademie in Triest, wo *Bronzin* unterrichtete, war eine höhere Handelsschule, die um 1817 durch die k. u. k. Reichsverwaltung mit dem Ziel einer Förderung der Handelsaktivitäten des Freihafens Triest gegründet worden war. Triest war der einzige bedeutende Zugang des Reiches zum Mittelmeer und wurde daher von der habsburgischen Administration nach Kräften gefördert. Als Hafenstadt entwickelte sich Triest zu einem Zentrum des Handels mit Warenbörse und einer bedeutenden Versicherungswirtschaft. Das kulturelle, gesellschaftliche und wirtschaftliche Umfeld war günstig für die Versicherungsbranche, die zusätzlichen Schutz gegen persönliches Unglück in der von Beständigkeit und Sicherheitsdenken geprägten Welt des österreichisch-ungarischen Imperiums versprach. Davon profitierte in Triest die Generali, aber auch die Riunione Adriatica di Sicurtà (RAS) und die Lloyd Adriatico. Kaderschmiede dieser Gesellschaften war die Akademie, deren Lehrplan so modern anmutende Gebiete wie Wahrscheinlichkeits- und Spieltheorie umfasste.

Als Börsenzentrum für Wertpapiere besass Triest um die Jahrhundertwende keine grössere Bedeutung mehr. Wohl umfasste das lokale Kursblatt alle wichtigen Titel aus dem österreichisch-ungarischen Raum sowie Italien,

---

[17] Eine aktualisierte Darstellung seiner wichtigsten diesbezüglichen Arbeiten findet man in *Boltzmann* (2000).

[18] Dem gegenüber knüpft *Bachelier,* wohl unbewusst, direkt an den Grundgedanken von *Boltzmanns* statistischem Modell an, indem er das dynamische Verhalten des Marktpreises als Diffusionsprozess beschreibt. Die daraus gewonnene Diffusionsgleichung (die letzte Gleichung auf p. 46 bei *Bachelier* 1900) wird üblicherweise *Einstein* (1905) zugeschrieben, der dieselbe Formel zur mathematischen Beschreibung der Brownschen Bewegung verwendet und sich bei der Fundierung explizit auf *Boltzmanns* statistisches Modell bezieht. Die vielfältigen und keinem Beteiligten bewussten Bezüge zwischen *Bachelier, Einstein, Boltzmann* und *Bronzin* stellen eine Kuriosität dar. Dass sich *Boltzmann* im Jahre 1906 in Duino, in unmittelbarer Nachbarschaft des Wohnorts von *Bronzin,* das Leben nahm, mag diesem Sachverhalt noch eine makabere Pointe verleihen.

aber die Handelsaktivität hielt sich in Grenzen. Termin- oder Prämiengeschäfte gab es pro Monat eine Handvoll.[19] Die beachtlichen Wertpapierbestände liessen die Versicherungsgesellschaften hingegen in Wien oder Venedig umschichten. Auch der Terminhandel an der Triester Warenbörse stagnierte nach einem Aufschwung im letzten Viertel des 19. Jahrhunderts auf tiefem Niveau. Trotzdem wurde die Börseninfrastruktur ausgebaut und wurden laufend Börsenagenten (Sensale) – vor allem an der Akademie – ausgebildet. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts gab es rund 150 eingetragene Sensale in Triest – mehr, als für die in jener Zeit nicht überwältigende Börsentätigkeit nötig gewesen wäre. Hingegen wurde im Rahmen der Ausbildung dieser Sensalen intensiv über spekulative Anlagen und Termingeschäfte nachgedacht.[20]

Wenn es auch nicht die reale ökonomische Situation in der habsburgisch-ungarischen Monarchie war, die *Bronzin* zur Ausarbeitung seines Modells bewogen, so dürften es – neben den ausbildungsbezogenen Diskussionen – vor allem politisch-bildungsorientierte Gesichtspunkte gewesen sein, die ihn zu seinen Überlegungen motivierten: Einerseits galt die Börse um die Jahrhundertwende als ein Hort der Spekulation und Ausbeutung. Der Wiener Bürgermeister *Karl Lueger* verlangte anlässlich der Diskussion um eine Besteuerung von Börsenumsätzen und Aktiengewinnen im Landtag im Jahre 1892, den Börsianern das Wahlrecht zu entziehen, und meinte, „die Besteuerung der Börsengeschäfte sei nichts anderes, als etwas von dem Raub zurückzuverlangen, das sich die Spielhölle Börse vom Volkseigentum geholt hatte“. Der Kampf gegen die Spekulation mischte sich mit Antisemitismus. Ein Abgeordneter im Landtag rief in die Diskussion: „Hängt 300 Börsenjuden, und ihr werdet sehen, wie morgen die Brotpreise fallen.“

Der Terminhandel – als zentraler, aber auch riskantester Teil des Börsengeschäftes – wurde an der Wiener Börse als Folge dieser politischen Bewegungen praktisch zum Verschwinden gebracht. 1901 akzeptierte ein Wiener

---

[19] Archivio dello stato di Trieste, atto „Listino Ufficiale della Borsa di Trieste“, sub „Borsa“, B18.

[20] Vgl. dazu etwa *Piccoli* (1882), der Professsor am Istituto Revoltella war, das damals bei der Akademie einquartiert war. *Piccoli* schreibt in seinem als Buch veröffentlichten Vorlesungsskript zu den Optionsgeschäften:

> „Economicamente il premio va considerato come un premio di assicurazione. Il datore del premio è l'assicurato; il prenditore è l'assicuratore; il danno effettivo ed incerto, che altrimenti in seguito a mutamenti nel prezzo di una merce pattuita a termine lo potrebbe colpire. Anche nel contratto a premio, come nel contratto di assicurazione, il premio limita i pericoli e le speranze del contratto per ambedue i contraenti“, p. 38.

Auch in dem bekanntesten Buch des Triestiner Schrifstellers *Italo Svevo,* „La Coscienza di Zeno“, sind Warenspekulationen von zentraler Bedeutung. *Svevo* unterrichtete wie *Piccoli* am Istituto Revoltella.

Gericht den Einwand, Terminkontrakte seien Vereinbarungen auf der Grundlage von Wette und Spiel, was die rechtliche Basis dieser Kontrakte aushöhlte[21]. *Bronzins* Überlegungen zu einer mathematischen Behandlung der Spekulation sind vor diesem Hintergrund gewagt, widersprechen dem politischen Trend. Sie heben den verpönten Börsenhandel und im Speziellen die riskanten Prämienkontrakte aus dem Ruch von Hintertreppengeschäften und verleihen ihnen die Weihe einer den mathematischen Gesetzmässigkeiten unterliegenden Tätigkeit. Vielleicht war es derselbe Abwehreffekt, auf den *Bachelier* mit seiner Arbeit bei seinem Doktorvater, dem Mathematiker *Henri Poincaré,* gestossen ist[22].

Exkus: **Mathematik und die Modellierung von Marktrisiken**

Selbstverständlich war die Verwendung von Mathematik im Finanzbereich um die Jahrhundertwende nicht generell ungewohnt oder verpönt; die Versicherungsmathematik und Aktuarwissenschaften spielten beim Boom der Versicherungsgesellschaften im 19. Jahrhundert eine entscheidende Rolle. Die aktuariellen Modelle gehörten zu den bestgehüteten Firmengeheimnissen, und die Chefaktuare genossen mitunter Kultstatus. Demgegenüber war die Zurückhaltung gewaltig, wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle zur Modellierung von Marktrisiken heranzuziehen. Ein diesbezügliches Beispiel liefert *Emanuel Czuber* (1910), der führende Versicherungsmathematiker an der Technischen Hochschule in Wien. Die Versicherungen waren im Anschluss an den Börsenkrach der 1870er Jahre verpflichtet, Kursschwankungsreserven für ihre Wertpapierbestände (namentlich Anleihen) zu bilden. Einerseits anerkannte *Czuber* durchaus, dass es die zentrale Aufgabe der „Risikotheorie“ sei, die Höhe der erforderlichen Reserven (in seiner Terminologie: „Fonds“) zu bestimmen, die notwendig sind,

> „um das Unternehmen gegen die Folgen eines eventuellen Verlustes aus Abweichungen von den Rechnungselementen mit einem vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsgrade zu schützen“. (*Czuber* 1910, p. 411).

Bei den Rechnungselementen handelt es sich um die aktuariellen Annahmen bezüglich Zinssätzen, Aktienrenditen u.a. Aber anderseits ist er äusserst skeptisch, dass sich die Risikotheorie dazu in der Praxis wirklich eignet. In Bezug auf die Zinsänderungsrisiken führt er etwa aus:

> „… [die Risikotheorie] ruht auf dem Boden der zufälligen Ereignisse…. Die Änderungen des Zinsfusses …. tragen aber nicht den Charakter des Zufälligen an sich, das Systematische waltet hier vor.“ (*Czuber* 1910, p. 411).

---

[21] *Schmit* (2003), pp. 143 ff.

[22] So findet man in Poincaré’s Gutachten die durchaus nicht sehr wohlwollende Bemerkung: „Le sujet choisi par M. Bachelier s’éloigne un peu de ceux qui sont habituellement traités par nos candidats“; zitiert nach *Taqqu* (2001), Appendix.

An anderer Stelle äussert er sich über Marktrisiken im allgemeinen:

„Aus den Erfahrungen kann wohl ein Bild darüber gewonnen werden, wie sich die Verzinsung der verschiedenen Anlagewerte in der Vergangenheit gestaltet hat; bei dem unregelmässigen Charakter der Variationen, die oft durch lange Zeiträume unmerklich vor sich gehen, um dann plötzlich ein starkes Tempo einzuschlagen, lässt sich ein begründeter Schluss auf die Zukunft schwer ziehen." (*Czuber* 1910, p. 233).

War es mangelnde Erfahrung bei der Modellierung von Marktrisiken, oder wollte man die edle Mathematik von den verruchten Börsen- und Termingeschäften fernhalten?

Dass der Arbeit von *Bronzin* sicher auch eine edukative Zielsetzung zu Grunde lag, ist zumindest nicht auszuschliessen – nur dürfte ihre Publikation möglicherweise zu spät erfolgt sein. Dazu einige Überlegungen im nachfolgenden Abschnitt.

VII. Standardisierung und Modernisierung der Ausbildung

Obwohl die Börsentätigkeit in der Habsburgermonarchie allgemein stark zurückging, florierte die wirtschaftliche Entwicklung. In den 1890er Jahren setzte im k. u. k. Reich ein anhaltender Aufschwung ein, der durch staatliche Einflussnahme, durch Subventionen, stabilitätspolitische Eingriffe sowie gezielte Verstaatlichungen gekennzeichnet war. Nach einer kurzen Rezession setzte unter dem Kabinett von *Ernest von Koerber* (1900–1904) erneut ein Modernisierungsschub ein, der den Ausbau der Infrastruktur – wie etwa der Bahnverbindung zwischen Wien und Triest – zum Ziel hatte.

Dieser Modernisierungsschub war mit einer starken Förderung der kaufmännischen Ausbildung gekoppelt und getragen von der Idee, durch die Handelsförderung – und als Teil davon die Handelsausbildung – die erstarkenden nationalen Unabhängigkeitsbewegungen im k. u. k. Vielvölkerstaat zu domestizieren. Einer der führenden Köpfe in der Ausbildungsfrage war der Slowene *Eugenio Gelcich,* der das Amt eines Direktors der Handels- und Nautischen Akademie vor *Bronzin* versah. Bereits während seiner Direktorenzeit in Triest war er gleichzeitig Zentralinspektor für das kaufmännische Ausbildungswesen für das ganze Reich, bis er 1904 k. u. k. Hofrat und Ministerialbeamter wurde[23].

Unter der Ägide von *Gelcich* entstand eine mehrbändige globale Übersicht über die Ausbildungspläne im kaufmännischen Berufswesen. Er organisierte internationale Konferenzen für Handelslehrer, strebte eine Standar-

[23] *Subak* (1917), pp. 269 ff.

disierung der Ausbildung im höheren kaufmännischen Bildungswesen an und führte eine noch stärkere Zentralisierung der Qualitätskontrolle bei der Ausbildung ein. Nukleus seiner Bemühungen war Triest, wo sich die Gegensätze zwischen den verschiedenen nationalistisch gefärbten Volksgruppen zuspitzten. Getreu der Devise, dass der Handel und der damit verbundene höhere wirtschaftliche Wohlstand mithilft, die nationalen Gegensätze auszugleichen, unterstützte *Gelcich* beispielsweise das Istituto Revoltella, eine von einem Triestiner Geschäftsmann mit dem Ziel einer Förderung der Italianità gegründete Handelsschule auf Universitätsniveau, obwohl sich der Lehrkörper vehement für den Anschluss Triests an Italien einsetzte. Nur dank *Gelcichs* Bemühungen gelang es, die Existenz dieses Institut zu sichern[24]. Teil der Strategie Gelcichs war es auch, den Ausbau der Handelshochschule in Wien zu forcieren, an der *Bronzin* eine Professur hätte übernehmen sollen.

Mit dem Ausbruch des Ersten Weltkrieges brachen alle diese Pläne in sich zusammen, und *Bronzin* blieb der Akademie bis zu seiner Pensionierung treu, wobei sich sein akademisches Interesse an finanzmathematischen Fragen mit der „Theorie der Prämiengeschäfte" offenbar im Abklingen befand. Es scheint, dass das Buch in seinem späteren Lebenslauf gar verschwiegen wird[25]. Unterschätzte er seine eigene wissenschaftliche Leistung oder glaubte er auch nicht an die praktische Bedeutung seiner Arbeit? In der einzigen von uns gefundenen Besprechung des Werks liest man:

> „Es ist kaum anzunehmen, dass die bezüglichen Resultate einen besonderen praktischen Wert erlangen können, wie ja übrigens auch der Verfasser selbst andeutet"[26].

Wo dies der Autor selbst andeuten sollte, ist allerdings nicht klar. Auf alle Fälle verlagerte sich *Bronzins* Interesse in den darauf folgenden Jahren auf ganz andere Probleme, wie etwa der Berechnung des Datums, auf das Ostern im Jahr 3165 fallen wird.[27] *Bronzin* starb 1970 im Alter von 98 Jahren.

---

[24] *Dlabac/Gelcich* (1910). p. 304 f.: „Die Kreditinstitute, die kommerziellen Kreise und die lokalen Faktoren, wie die Handelskammer und die Gemeinde nahmen an der Anstalt nur geringes Interesse und brachten für dieselbe keine ausreichenden materiellen Opfer."

[25] In der von *Subak* (1917) herausgegebenen Festschrift zum hundertjährigen Jubiläum der Akademie fehlt in der Liste seiner Publikationen das Buch über die Prämiengeschäfte, während zwei frühere finanzmathematische Veröffentlichungen (*Bronzin* 1904, 1906) und eine spätere Arbeit zu einem völlig anderen Thema (*Bronzin* 1911) erwähnt werden.

[26] Buchbesprechung ohne Autorbezeichnung in: *Monatshefte für Mathematik und Physik 21*; Verlag des Mathematischen Seminars der Universität Wien.

[27] *Bronzin* (1911).

VIII. Ein Vergleich mit anderen frühen Optionspreismodellen

Die Dissertation des Franzosen *Louis Bachelier* wird gemeinhin als Geburtsstunde der modernen Optionspreistheorie – oder allgemeiner: der stochastischen Modellierung von Finanzmärkten – betrachtet. Die Arbeit blieb von den Ökonomen mehrere Jahrzehnte unbeachtet, bis *Paul A. Samuelson* in den fünfziger Jahren über den Statistiker *L. Savage* auf die Arbeit aufmerksam wurde. In einer ersten, nicht-publizierten Arbeit im Jahre 1955 hat *Samuelson* die absolute (arithmetische) Brown'sche Bewegung aufgrund der beschränkten Haftung (limited liability) der Aktionäre durch einen multiplikativen (geometrischen) Prozess substituiert; siehe dazu auch *Samuelson* (1973). Das Interesse von Samuelson an der Arbeit von *Bachelier* hat verschiedene Arbeiten zur Optionsbewertung ausgelöst: *Kruizenga* (1956), *Sprenkle* (1961/1964), *Ayres* (1963) und *Boness* (1964). Keines der Bewertungsmodelle ist jedoch präferenzfrei. Die wichtigsten dieser frühen Arbeiten sind in einem von Cootner (1964) herausgegebenen Buch publiziert, inklusive einer englischen Übersetzung der Dissertation von *Bachelier*. Letztere wurde in den neunziger Jahren (1995) in der französischen Originalversion neu aufgelegt.

Samuelson (1965) selbst hat eine Bewertungstheorie für Optionsscheine (warrants) publiziert, welche – obwohl ihr ein allgemeiner Gleichgewichtsansatz zugrunde liegt – viele Elemente des späteren Black-Scholes-Modells enthält. Auch sein Ansatz ist nicht präferenzfrei – allerdings enthält die Arbeit eine Bemerkung, welche das Modell haarscharf an Black-Scholes heran führt. *Samuelson* ermöglicht in seinem Modell unterschiedliche erwartete Renditen für Aktie (notiert mit α) und Warrant (notiert mit β). Er führt zwei Gründe an, dass $\beta > \alpha$ gelten muss (siehe auch *Smith* (1976, p. 19): Entweder wird der Warrant als riskanter angenommen als die Aktie, was zu einer höheren Risikoprämie führt. Oder die Aktie wirft eine Dividendenrendite δ ab, so dass die Warrant-Rendite β nicht nur höher als α, sondern mindestens im Umfang von δ über der erwarteten Aktienrendite α liegen muss. Gleichzeitig argumentiert er, dass aus Gründen des Hedging, d.h. der gegenseitigen Neutralisierbarkeit der Aktien- und Warrantposition, die Differenz zwischen α und β „nicht zu gross" sein könne (p. 31). Die Arbeit enthält insbesondere auch einen mathematischen Anhang, in welchem *McKean* (1965) die Lösung der fundamentalen partiellen Differentialgleichung unter Anlehnung an die physikalische Wärmeaustauschgleichung zeigt.

Die Verbindung von *Samuelson*'s Modell mit der späteren Modellerweiterung mit in *Samuelson/Merton* (1969) ist besonders aufschlussreich. Wichtigstes Merkmal dieses Modells ist die Unterscheidung einer statistischen

Wahrscheinlichkeitsverteilung P und einer nutzen-adjustierten Verteilung Q; die Autoren erkennen, dass unter Q sowohl die erwartete Rendite der Aktie als auch des Warrants dem risikolosen Zinssatz entsprechen (p. 26). Es ist in jeder Hinsicht erstaunlich, dass die Autoren unter diesen Voraussetzungen die letzte Konsequenz, nämlich eine präferenzfreie Bewertungsgleichung, übersehen. Samuelson selbst äusserte sich im Jahre 2000 dahingehend, dass er selbst zwar die „Gleichung“, Black und Scholes hingegen die „Formel“ gehabt habe (siehe *Geman* 2000).

Die tabellarische Darstellung im *Appendix 2* bietet einen Überblick über die wichtigsten, frühen Optionspreismodelle. Es wird zur besseren Vergleichbarkeit eine einheitliche Notation gewählt.

Im Vergleich zu diesen Modellen weist *Bronzins* Modell[28] auch wieder jene Unterschiede auf, wie sie schon im ersten Abschnitt gegenüber dem Black-Scholes-Modell hervorgehoben wurden (keine Modellierung des Kursprozesses; Terminkurs als Referenzgrösse, insbesondere als Erwartungswert des Kurses; vielfältige Verteilungsannahmen). Von besonderem Interesse ist natürlich die Gegenüberstellung von *Bronzins* Modell mit *Bachelier*.

Die wichtigste Gemeinsamkeit liegt darin, dass eine Normalverteilung für das Kursniveau bei Verfall unterstellt wird – bei *Bachelier* als Ergebnis einer absoluten (oder arithmetischen) Brown'schen Bewegung. Während bei *Bachelier* der heutige Kurs als bester Schätzwert für den Erwartungswert verwendet wird[29], wird bei *Bronzin* der Erwartungswert durch den Terminkurs ersetzt. Bei *Bachelier* wird ausdrücklich ein Zinssatz sowie eine Spekulationsprämie von Null unterstellt, bei *Bronzin* ist der Fall weniger klar (aber letztlich irrelevant). Die Übereinstimmung der Modelle erkennt man, wenn bei *Bronzin* die folgende Variablentransformation durchgeführt wird:

- S anstelle des Terminkurses B;
- Ausübungspreis K anstelle von M;
- $\sigma(S)\sqrt{T}$ als Volatilität der absoluten Kursschwankungen.

Den Aktienkurs bei Verfall notieren wir bei *Bachelier* mit $\tilde{S}_T = S + \sigma(S)\,\tilde{z}\sqrt{T}$, d.h. der heutige Kurs ist der beste Erwartungswert für den Kurs bei Verfall. Die Ausübungswahrscheinlichkeit der Option beträgt so

$$pr(\tilde{S}_T > K) = pr\left(\tilde{z} = \frac{\tilde{S}_T - S}{\sigma(S)\sqrt{T}} > \frac{K - S}{\sigma(S)\sqrt{T}}\right) = pr\left(\tilde{z} > \frac{K - S}{\sigma(S)\sqrt{T}}\right) = pr\left(\tilde{z} < \frac{S - K}{\sigma(S)\sqrt{T}}\right)$$

[28] Wenn von *Bronzins* Modell die Rede ist, so ist in diesem Abschnitt die Lösung mit der Annahme des Fehlergesetzes gemeint.

[29] „Le marché ne croit, à un instant donné, ni à la hausse, ni à la baisse du cours vrai“; *Bachelier* (1900), p. 16.

Der Optionspreis ergibt sich aus der Bewertungsformel

$$(11) \qquad P_1 = \int_K^{\infty} (\tilde{S}_T - K) f(S_T) dS_T = \int_{-\infty}^{z_2} \big(S + \sigma(S)\tilde{z}\sqrt{T} - K\big) f(z) dz$$

und beträgt

$$\begin{aligned} P_1 &= S \int_{-\infty}^{z_2} f(z)dz + \sigma(S)\sqrt{T} \int_{-\infty}^{z_2} \tilde{z} f(z) dz - K \int_{-\infty}^{z_2} f(z)dz \\ &= S\,N(z_2) + \frac{\sigma(S)\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-1/2(z_2)^2} - K\,N(z_2), \qquad z_2 \equiv \frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

und schliesslich

$$(12) \qquad P_1 = S\,N(z_2) + \sigma(S)\sqrt{T}N'(z_2) - K\,N(z_2),$$

was genau mit dem Modell von *Bachelier* übereinstimmt; siehe *Smith* (1976), Appendix, für eine Darstellung von *Bacheliers* Bewertungsformel in der vorliegenden Notation.

IX. Schlussbemerkung

Mit seiner Arbeit bricht *Bronzin* in mathematischer Hinsicht, im Unterschied zu *Bachelier* (1900), zu keinen neuen Ufern auf. Er verwendet die zu dieser Zeit bekannten und verbreiteten Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, um den Wert von Termingeschäften (Optionsrechten) zu bestimmen. Das Spektakuläre an der Arbeit liegt in der Begründung des Bewertungsansatzes – der auf dem Terminkurs beruht und damit präferenzfrei ist – sowie einigen analytischen Erkenntnissen, zu welchen der Autor bei seinen Überlegungen gelangt. Die Arbeit präsentiert sich ohne Bezüge zur Literatur über Finanz- und Börsengeschäfte, sie scheint insbesondere auch ohne Kenntnis von *Bacheliers* Dissertation entstanden zu sein. Ob der Autor sie als wissenschaftliche Monografie oder Lehrbuch verstand, kann aufgrund der verfügbaren Informationen nicht beurteilt werden. Aber zweifellos stellt sie einen in jeder Hinsicht beachtenswerten Baustein in der Geschichte der Optionspreistheorie dar und teilt mit der Arbeit von *Bachelier* das Schicksal, über Jahrzehnte hinweg auf kein Interesse gestossen zu sein. Wir hoffen, mit dem vorliegenden Beitrag die Bedeutung dieser Arbeit unterstreichen zu können.

Appendix 1: **Gleichung (43) versus Black-Scholes-Modell**

	Bronzin (43)	Black-Scholes-Modell
	$P_1 = \int_M^\infty (\tilde{x} - M) f(x)\, dx$	
Variablen-spezifikation	$\tilde{x} = \tilde{S}_T - B$ $E(S_T) = B,\ E(x) = 0,\ \sigma(x) = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ $M = K - B$	$\tilde{x} = \tilde{S}_T = Be^{r - 1/2\sigma^2 + \sigma\tilde{z}} = S_0 e^{r - 1/2\sigma^2 + \sigma\tilde{z}},\ r = 0 \Rightarrow S_0 = B$ $E(\ln\tilde{x}) = \left(\ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2\right),\ \sigma(\ln\tilde{x}) = \sigma$ $M = K$
Dichte	$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$	$f(\ln x) = f\left(\ln\tilde{S}_T\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \left(\ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\right)^2\right\}$
Neue Notation	$P_1 = \int_M^\infty \tilde{x} f(x)\, dx - M \int_M^\infty f(x)\, dx$	$P_1 = \int_K^\infty \tilde{S}_T f(S_T)\, dS_T - K \int_K^\infty f(S_T)\, dS_T$
Grenzen des 2. Integrals	$\int_M^\infty f(x)\, dx = pr(\tilde{x} > M) = pr(h\tilde{x} > hM)$ $\equiv pr(t > hM)$ $\int_M^\infty f(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_M^\infty e^{-h^2x^2} dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{hM}^\infty e^{-t^2} dt}_{\psi(hM)}$	$\int_K^\infty f(S_T)\, dS_T = pr\left(\tilde{S}_T > K\right) = pr\left(\ln\tilde{S}_T > \ln K\right) =$ $pr\left(\underbrace{\frac{\ln\tilde{S}_T - \left[\ln S_0 - 1/2\sigma^2\right]}{\sigma}}_{\tilde{z}} > \underbrace{\frac{\ln K - \left[\ln S_0 - 1/2\sigma^2\right]}{\sigma}}_{-\frac{\ln\frac{S_0}{K} - 1/2\sigma^2}{\sigma} = -z_2}\right) = \underbrace{\int_{-\infty}^{z_2} f(z) dz}_{N(z_2)}$

	Bronzin (43)	Black-Scholes-Modell
	$\psi(hM)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{hM}^{\infty}e^{-t^2}dt\overset{*}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{M/\sigma(x)}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=N\left(-\frac{M}{\sigma(x)}\right)\overset{**}{\approx}N(z_2)$ ${}^{*}pr(h\tilde{x}>hM)=pr\left(\tilde{z}=\frac{\tilde{x}}{\sigma(x)}>\frac{M}{\sigma(x)}\right),$ ${}^{**}-\frac{M}{\sigma(x)}=-\frac{K-B}{B\sigma}=-\frac{K-S_0}{B\sigma}=-\frac{\frac{K}{S_0}-1}{\sigma}\approx-\frac{\ln\frac{K}{S_0}+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}=\frac{\ln\frac{S_0}{K}-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}=z_2$	
1. Integral	$\int\limits_{M}^{\infty}\tilde{x}\,f(x)dx=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{M}^{\infty}\tilde{x}\,e^{-h^2x^2}dx=\frac{e^{-M^2h^2}}{2h\sqrt{\pi}}$	$S_0\int\limits_{-\infty}^{z_2}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2+\sigma\tilde{z}}f(z)dz=S_0\,N(z_2+\sigma)$
Lösung des Options-preises	$P_1=\frac{e^{-M^2h^2}}{2h\sqrt{\pi}}-M\,\psi(hM)$	$P_1=S_0\,N\{z_2+\sigma\}-K\,N\{z_2\}$
	Black-Scholes-Modell in der Bronzin (43)-Notation (mit Standardnormalverteilungsabschnitten): $P_1=\int\limits_{K}^{\infty}\Big(\underbrace{\tilde{S}_T-K}_{*}\Big)f(S_T)dS_T=B\sigma\int\limits_{-z_2}^{\infty}\tilde{z}f(z)dz-M\int\limits_{-z_2}^{\infty}f(z)dz=\underbrace{\frac{B\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2(z_2)^2}}_{**}-M\underbrace{N(z_2)}_{***}=B\sigma\underbrace{N'(z_2)}_{\equiv f(z=z_2)}-MN(z_2)$ ${}^{*}\tilde{S}_T-K=\left(Be^{-\frac{1}{2}\sigma^2+\sigma\tilde{z}}\right)-K\overset{asympt}{\approx}B(1+\sigma\tilde{z})-K=B\sigma\,\tilde{z}-(K-B)=B\sigma\,\tilde{z}-M$ ${}^{**}\frac{B\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2(z_2)^2}\approx\frac{\sigma(x)}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\left(\frac{M}{\sigma(x)\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{e^{-M^2h^2}}{2h\sqrt{\pi}},\quad h=\frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2}}\qquad{}^{***}\ \psi(hM)\approx N(z_2)$	

Appendix 2

Überblick über die frühen Optionspreismodelle und Black/Scholes

Bachelier (1900)	Merkmale: Arithmetischer Wiener-Prozess (negative Preise); Drift des Prozesses von Null. $P_1 = S\,N\{z_2\} + \sigma(S)\sqrt{T}N'\{z_2\} - K\,N\{z_2\}, \quad z_2 \equiv \frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}}$
Bronzin (1908)	Merkmale: Normalverteilung für Kursniveaus (negative Preise); Terminkurs als Erwartungswert. $P_1 = B\,N\{z_2+\sigma\} - (K-B)\,N\{z_2\}, \quad z_2 = -\frac{K-B}{\sigma(x)}$
Sprenkle (1961) (1964)	Merkmale: Lognormalverteilung; positiver drift der Aktienrenditen (α); Risikoaversion berücksichtigt; aber keine Abdiskontierung vorgenommen (d.h. Zinssatz Null). $P_1 = Se^{\alpha T}\,N\{z_2+\sigma\} - K(1-\eta)\,N\{z_2\},\ z_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$
Boness (1964)	Merkmale: Lognormalverteilung; positiver Zinssatz und Risikoprämie; positive erwartete Aktienrendite (α), welche auch für die Abdiskontierung des erwarteten Optionspayoffs verwendet wird. $P_1 = S\,N\{z_2+\sigma\} - Ke^{-\alpha T}\,N\{z_2\}, z_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$
Samuelson (1965)	Merkmale: Lognormalverteilung; positiver Zinssatz und Risikoprämie; unterschiedliche erwartete Renditen für Aktie (α) und Option (β), und im allgemeinen $\beta > \alpha$. $P_1 = Se^{(\alpha-\beta)T}\,N\{z_2+\sigma\} - Ke^{-\beta T}\,N\{z_2\},\ z_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ Da aber die Differenz $\beta - \alpha$ „nicht zu gross sein kann", konkret wenn $\alpha = \beta$ wäre, gilt (formal analog zu Boness) $P_1 = S\,N\{z_2+\sigma\} - Ke^{-\alpha T}\,N\{z_2\},\ z_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$
Samuelson/ Merton (1969)	Unter der Wahrscheinlichkeitsverteilung Q gilt $\alpha = \beta = r$ (p. 26), womit Samuelson (1965) zu Black-Scholes wird.
Black/Scholes (1973) *Merton* (1973)	$P_1 = S\,N\{z_2+\sigma\} - Ke^{-rT}\,N\{z_2\},\ z_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$
Variablen-definition	P_1: Calloptionspreis; K: Ausübungspreis; η: relative Risikoaversion; α: erwartete Wachstumsrate des Aktienkurses resp. erwartete Aktienrendite; β: erwartete Wachstumsrate des Warrantkurses, r risikoloser Zinssatz

Literaturverzeichnis

Ayres, H. (1963): Risk aversion in the warrants market, Industrial Management Review 4, pp. 497–505.

Bachelier, L. (1900, 1964, 1995): Théorie de la speculation; Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Supérieure, Paris, Ser. 3, 17 (1900), pp. 21–88. Wiederaufgelegt bei Jacques Gabay (1995); Englische Übersetzung in: Cootner (1964), pp. 17–79.

Black, F. (1976): The pricing of commodity contracts, Journal of Financial Economics 3, pp. 167–179.

Black, F./*Scholes,* M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy 81, pp. 637–654.

Boltzmann, L. (2000): Entropie und Wahrscheinlichkeit; Harri Deutsch (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, vol. 286).

Boness, J. (1964): Elements of a theory of stock-option value, Journal of Political Economy 72, 163–175.

Bronzin, V. (1904): Arbitrage, Monatsschrift für Handels- und Sozialwissenschaft 12, pp. 356–360.

– (1906): Lehrbuch der politischen Arithmetik, Franz Deuticke.

– (1908): Theorie der Prämiengeschäfte; Franz Deuticke.

– (1911): Sul Calcolo della Pasqua nel Calendario Gregoriano.

Cootner, P. (1964): The random character of stock market prices, MIT-Press.

Cox, J./*Ross,* S./*Rubinstein,* M. (1979): Option pricing: A simplified approach; Journal of Financial Economics 7, pp. 229–263.

Czuber, E. (1910): Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, 2 Bände, 2. Auflage, Teubner.

Dlabac, F./*Gelcich,* E. (1910): Das kommerzielle Bildungswesen in Oesterreich (Das kommerzielle Bildungswesen der europäischen und aussereuropäischen Staaten, Teil 6), Hölder.

Einstein, A. (1905): Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", Annalen der Physik 17, pp. 549–560.

Flusser, G. (1911): Über die Prämiengrösse bei den Prämien- und Stellagegeschäften, Jahresbericht der Prager Handelsakademie, pp. 1–30.

Geman, H. (2002): Foreword; Mathematical Finance – Bachelier Congress 2000, Hrsg. von H. Geman et al., Springer.

McKean, H. P. (1965): A free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics, Appendix to Samuelson (1965), Industrial Management Review 6, No. 2, pp. 32–39.

Kruizenga, R. (1956): Put and call options: a theoretical and market analysis; unveröffentlichte PhD Thesis, MIT.

Merton, R. C. (1973): Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science 4, pp. 141–183.

Piccoli, G. (1882): Elementi di Diritto sulle Borse e sulle operazioni di Borsa secondo la Legge Austriaca e le norme della Borsa Triestina, Lezione; Trieste (im Selbstverlag).

Samuelson, P. A. (1965): Rational theory of warrant pricing, Industrial Management Review 6, pp. 13–32.

– (1973): Mathematics of speculative price. SIAM Review (Society of Industrial and Applied Mathematics) 15, pp. 1–42.

Samuelson, P. A./*Merton,* R. C. (1969): A Complete Model of Warrant Pricing That Maximizes Utility; with P.A. Samuelson, Industrial Management Review 10, pp. 17–46.

Schmidt, H. (1978, 1988): Termingeschäfte, Bank-Lexikon, Handwörterbuch für das Bank- und Sparkassenwesen, 8. Auflage (1978) pp. 1523–1536, 10. Auflage (1988) pp. 2015–2034.

Schmit, J. (2003): Die Geschichte der Wiener Börse, Frühwirth Bibliophile Edition.

Smith, C. (1976): Option pricing – A review, Journal of Financial Economics 3, pp. 3–52.

Sommerfeld, H. (1926): Börsenverkehr und Börsengeschäfte, in: Die Handelshochschule. Lehrbuch der Wissenschaften, Band 1, Kapitel 7 (Hrsg. F. Schmidt), p. 1701.

Sprenkle, C. M. (1961, 1964): Warrant prices as indicators of expectations and preferences, Yale Economic Essays 1, pp. 178–231; siehe auch: Cootner (1964), pp. 412–474.

Stoll, H. (1969): The relationship between put and call option prices, Journal of Finance 24, pp. 801–824.

Subak, G. (1917): Cent'Anni d'Insegnamento Commerciale – La Sezione Commerciale della I.R. Accademia di Commercio e Nautica di Trieste, Presso la Sezione Commerciale della I.R. Accademia di Commercio e Nautica, Trieste.

Taqqu, M. (2001): Bachelier and his times: A conversation with Bernard Bru, Finance and Stochastics 5, pp. 3–32.

Zhang, J. E. (2003): From Bachelier to Black-Scholes, Lecture Notes.

Zimmermann, H./*Hafner,* W. (2004): Amazing discovery. Professor Bronzins option pricing theory, Manuscript, Universität Basel.

– (2006): Vincenz Bronzins Option Pricing Theory: Contents, Contribution, and Background, in: G. Poitras (Hrsg.): Pioneers of Financial Economics – Contributions Prior to Irving Fisher, Edward Elgar Publishing.

Amazing discovery: Vincenz Bronzin's Option Pricing Models

Heinz Zimmermann
Wolfgang Hafner

Universität Basel, Switzerland

Final version
forthcoming in the Journal of Banking and Finance
27 July 2006

Abstract

In 1908, Vinzenz Bronzin, a professor of mathematics at the Accademia di Commercio e Nautica in Trieste, published a booklet in German entitled Theorie der Prämiengeschäfte (Theory of Premium Contracts) which is an old type of option contract. Almost like Bachelier's now famous dissertation (1900), the work seems to have been forgotten shortly after it was published. However, almost every element of modern option pricing can be found in Bronzin's book. In particular, he uses the normal distribution to derive a pricing equation which comes surprisingly close to the Black-Scholes-Merton formula

Keywords: Option pricing; Premium contracts; History of option pricing theory; Trieste; Evolution and socio-economic impact of financial models

JEL-Classification: B16, B31, G13, N23

Amazing discovery: Vincenz Bronzin's Option Pricing Models

Heinz Zimmermann
Wolfgang Hafner[#]

Universität Basel, Switzerland

Address:

Department of Finance
Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum WWZ
Universität Basel
Holbeinstrasse 12
CH-4051 Basel Switzerland
heinz.zimmermann@unibas.ch

[#] We would like to thank Robert C. Merton, David Rey, Yvan Lengwiler, Stefan Duffner and Yvonne Seiler for comments on an earlier drafts of this paper. The revisions suggested by Giorgio Szegö (the editor) and an anonymous referee improved the paper substantially. We are grateful to Ana Perisic who established the contact to the Bronzin family, and to Josef Zechner, Herbert Matis, Dieter Stiefel, Peter Urbanitsch and Helmut Grössing for interesting discussions on the subject. In Trieste, the following persons were extremely helpful, with respect to contacts, information, and comments: Giorgio Raldi, Anna Millo, Anna Maria Vinci, Ermanno Pitacco, Patrik Karlsen. Sergio Cergol and Clara Gasparini from RAS, and from Generali: Alfred Leu, Alfeo Zanette, Marco Sarta, Ornella Bonetta (Biblioteca). The staff of the Archivio di Stato di Trieste, of the Biblioteca Civica di Trieste, and the Biblioteca dell'Assicurazioni Generali, Trieste, was extremely helpful and supporting. Partial financial funding by the WWZ-Förderverein is gratefully acknowledged under the project no. B-086.

1. Introduction

The doctoral thesis of Louis Bachelier (1900) is widely considered as the seminal work in option pricing theory. However, only a few years later, 1908, Vinzenz Bronzin, who was a professor of mathematics at the Accademia di Commercio e Nautica in Trieste, published a booklet in German, some 80 pages long, entitled *Theorie der Prämiengeschäfte* (Theory of Premium Contracts). While the work got some attention in the academic literature soon after it was published, it seems to have almost been forgotten later,[1] and more recent academic mentions are virtually inexistent.[2]

While his approach is more pragmatic than Bachelier's, every element of modern option pricing can be found: Risk neutral pricing, no-arbitrage and perfect-hedging pricing conditions, the put-call-parity, and the impact of different distributional assumptions on option values. In particular, he shows how the "normal law of error" – which is the normal density function – can be used to derive a closed-form solution for options prices, and how it is related to a binomial stock price distribution. His equation (43) comes surprisingly close to the Black-Scholes formula – considering the different assumptions under which it is derived (normal instead of a log-normal distribution of the underlying price). He moreover develops a simplified procedure to find analytical solutions for option prices by exploiting a key relationship between their derivatives (with respect to their exercise prices) and the underlying pricing density. Besides of pricing simple calls and puts, he develops formula for chooser options and, more important, repeat-options.

A general difficulty in the attempt to write about Bronzin's book is that it is written in German, and many of his finance related expressions (which may or may not reflect the commonly used terms at the time being) cannot be translated easily. We therefore have to find English terms as adequate as possible. Moreover we have adapted Bronzin's mathematical notation with only minor adjustments which we highlight where appropriate.[3]

The structure of the paper is as follows: Section 2 reviews the structure of Bronzin's books and some basic terminology; section 3 summarizes the

---

[1] For example it was mentioned in a standard banking textbook from Friedrich Leitner (1920) and a book by Karl Meithner (1924) The most notable exception is a follow-up paper by the mathematician Gustav Flusser (1911) extending some of Bronzin's results.

[2] We are aware of only one modern reference to Bronzin in a German option pricing textbook (see Welcker/ Kloy/ Schindler/ Audörsch 1988). However, the reference is very general and the authors do not comment on the significance of Bronzin's contribution in the light of modern option pricing theory.

[3] See also the first paragraph of the Appendix for a list of the additional variables used in this paper. Equations which are identical to those in Bronzin's book are marked with a respective reference.

fundamental elements of Bronzin's valuation theory. Section 4 demonstrates his option pricing model based on a normal distribution of the underlying share price. Section 5 makes an overall assessment of the scientific contribution of Bronzin's book in the light of the history of option pricing, and Section 6 is about the socio-economic and scientific background of Bronzin's work.

2. *Overview*

Bronzin's book contains two major parts. The *first* part is more descriptive and contains a characterization and classification of basic derivative contracts, their profit and loss diagrams, and basic hedging conditions and (arbitrage) relationships. The *second*, and more interesting part is on option pricing and starts with a general valuation framework, which is then applied to a variety of distributions for the price of the underlying security in order to get closed form solutions for calls and puts. Among these distributions is the "error function" which is closely related to the normal distribution. It is interesting to notice that the separation of topics between "distribution-free" and "distribution-related" results is in perfect line with the modern classification of option pricing topics, following Merton (1973).

In this part, Bronzin's methodological setup is completely different from Bachelier's, at least in terms of the underlying stochastic framework. He develops no stochastic process for the underlying asset price and uses no stochastic calculus, but directly makes different assumptions on the share price distribution at maturity and derives a rich set of closed form solutions for the value of options. This simplified procedure is justified insofar as his work is entirely focused on European style contracts (not to be exercised before maturity), so intertemporal issues (e.g. optimal early exercise) are not of premier importance.

The analysis of Bronzin covers forward contracts as well as options, but his main focus is on the latter. The term "option" does not show up. Instead, his analysis is on "premium contracts" which is an old type of option contract used in many European countries up to the seventies, before warrants and traded options became popular; see e.g. Courtadon (1982) for an analysis of the French premium market, and Barone/ Cuoco (1989) for the Italian market.

In contrast to modern options, premium contracts are written on forward contracts, rather than on the spot. The premium gives the buyer the right to withdraw from a fixed (e.g. forward) contract, or to enter a respective contract. This characterization can also be found in Bronzin: A long call option (*Wahlkauf)* is a forward purchase *plus* the right to "actually accept" the underlying object at delivery; a long put option (Wahl*verkauf*) is a forward sale *plus* our "reserved right to actually deliver or not, at our discretion" (p.2). A further institutional difference to modern options is that the premium was typically paid at delivery, not at settlement (deferred-premium options). However, Bronzin is not specific about this point.[4] Throughout the book, the time value of money does not enter his analysis explicitly, which either means that the premium is paid at delivery, or he assumes an interest rate of zero. Also, most premium contracts were American style – but Bronzin does not address the question of early exercise in his analysis. It is a general difficulty of Bronzin's analysis that it is not related to specific institutional characteristics, contracts, or underlying securities.[5] The underlying is often just called "object" and its price is referred to as "market" price.

Throughout the analysis, he distinguishes between "normal" and "skewed" contracts: A normal option contract exhibits an exercise price (denoted by K in this paper[6]) equal to the forward price B, while skewed contracts exhibit exercise prices deviating by the absolute amount $M > 0$ from the forward price, $K = B \pm M$.

In addition to these standard (or simple) options, Bronzin analyses two special contracts: options where the buyer has the right to determine whether he wants to buy or sell the underlying at maturity (called *Stella-Geschäfte*)[7]; and a special kind of "repeat option" (called *Noch-Geschäft*) which entitles the buyer to deliver a pre-defined multiple of the original contract size at expiration. The latter played a key role in derivatives trading in the 19th century.

3. *Key valuation elements*

Coverage and equivalence

Two key concepts, "coverage" and "equivalence" play an important role in the first part of Bronzin's book (sections 4 and 5 in chapter I, section 3 in chapter II). Bronzin defines a "covered" position as a combination of transactions (options *and* forward contracts) which is immune against profits and losses. Two systems

---

[4] E.g., his wording "if we buy forward at B_1 and pay a specific premium P_1" (p. 3) enables both interpretations.

[5] Except in the final numerical example on the second-last page, where he refers to "shares" (*Aktien*).

[6] The exercise price of the option exhibits no specific symbol in Bronzin's book – it is directly denoted by $B \pm M$ or other parameters where needed.

[7] They are also shortly addressed by Bachelier; see (p. 53) on *double primes*.

of positions are called "equivalent" if one can be "derived" from the other, or stated differently, if they provide exactly the same profit and loss for all possible "states of the market" (original wording in quotes). He explicitly notes the equivalence between hedging and replication by observing that one can always get two systems of equivalent transactions by taking a subset of contracts within a complex of covered transactions and reversing signs.

An immediate application of these insights is the put-call-parity, first for the special case of symmetric i.e. ATM call and put positions (chapter 1, Section 4, p. 9), and subsequently for skewed positions, i.e. calls and puts with arbitrary but equal exercise price (chapter 2, Section 1) which he calls a "remarkable condition" (p. 17). Denoting the call (put) option price by P_1 (P_2), he writes the parity for exercise price $B+M$, $M>0$, as

(1a)… $$P_2 = P_1 + M \qquad \text{(equation 4, p. 17)},$$

and for exercise price $B-M$ the parity is correspondingly as

(1b)… $$P_2 = P_1 - M \qquad \text{(equation 4a, p. 17)}.$$

This reflects the important insight that the difference between call and put prices is equal to the "moneyness" of the call (if $M = K - B > 0$) or the put option (if $M = B - K > 0$), defined relative to the forward price respectively. If the option price is paid at contract *settlement*, or alternatively if the time value of money is taken into account, the relationship to the standard put-call-parity can be derived by replacing $M = K - B$ by $\hat{M} \equiv Ke^{-rT} - S_0$ in equation (1a) and allowing for positive and negative values; r denotes the riskless interest rate, T the time to maturity, and S_0 the current value of the underlying asset. This leads to the well-known relationship $P_2 = P_1 \pm Ke^{-rT} - S_0$.

It is important to notice that Bronzin derives this parity relationship as a necessary condition for the feasibility of a perfect hedge (p.18). It is apparently obvious for him that a position which is fully hedged against all states of the market cannot exhibit a positive price – but the term "arbitrage" does not show up in Bronzin's text.[8]

[8] Interestingly, Bronzin (1904) published a paper entitled "arbitrage" a few years before. But the term was apparently applied to a more specific type of transactions at this time.

Probability and forward price

From the beginning of his analysis, Bronzin's focus is on the future variability (volatility) and the current state of the market, not the trend and price expectations. Although he clearly recognizes the random character of market fluctuations, he does not model them as a stochastic process (which is the key element of Bachelier's derivation), but directly describes the deviation around the expected market level – the forward price. Thus, the distribution of market prices at maturity is characterized by deviations from the forward price, $\tilde{x} \equiv \tilde{S}_T - B$, where $\tilde{S}_T$ denotes the stock price at maturity (in the notation of our paper).

Bronzin gives several justifications why to use the forward price as the mean of the probability distribution at maturity. He repeatedly argues that the forward price is the most likely among all possible future market prices (p. 56, p. 74, p. 80), i.e. the forward price is an unbiased predictor of the future spot price. Otherwise, he argues, that one could not imagine sales and purchases (i.e. opposite transactions) with equal chances if strong reasons would exist leading people to ultimately predict either a rising or falling market price with higher probability. Thus, the forward price is regarded as the most "advantageous" price for both parties in a forward transaction.

While the issue of price expectations seems to be important for Bronzin, it is not relevant for the development of his model. The important point is that the mean of the price distribution is based on *observable* market price (spot or forward price), not price expectation or other preference-based measures.[9] These would be relevant if statements about risk premiums or risk preferences should be made, which is not the intention of the author. Instead, his focus is on *consistent* (or in his wording, "fair") pricing relationships between spot, forward, and option contracts – which qualifies his probability density as a risk neutral density.

Fair pricing

Bronzin extends the characterization of market prices to the definition of expected profits and losses from financial contracts. He considers a valuation principle as "fair" if the expected value of profits and losses is zero for both parties when the contract is written (pp. 41/42). Thus, he considers a pricing rule as fair if expected profits and losses of a contract are derived from a "pricing"

[9] The same is true for Bachelier's analysis. In contrast to Bronzin, he does not argue with the forward price, but he apparently assumes that the price at which a forward contract (*opération ferme*) is executed is equal to the current spot price (see his characterization on p. 26; notice that his x is the deviation of the stock price at expiration from the current value).

density of the underlying which is centered at the forward price. The general pricing equation he derives from this principle is

(2)... $$P_1 = \int_M^{\omega} (\tilde{x} - M) f(x) dx \qquad \text{(equation 11, p. 46)}$$

where again, P_1 denotes the call option price and ω is the upper bound of the probability density, which may be finite or infinite. $\tilde{x}$ is the deviation of the market price from forward price B, $\tilde{x} \equiv \tilde{S}_T - B$ (in the notation of this paper), and M is the deviation of the exercise price from the forward price, $M = K - B$ (in the notation of this paper). Apparently, $\tilde{x} - M = \tilde{S}_T - B$. Of course, (2) is a risk-neutral (and specifically, preference-free) valuation equation because no expectations, risk premia or preferences show up in the parameters. The forward price makes it all. This interpretation is reinforced by an additional observation of the author:

Substituting probabilities by prices: A prologue to risk neutral pricing

The most amazing part of Bronzin's booklet is in Section 8 of the first chapter in part II, where he relates the probability function $f(x)$ to option prices. In modern option pricing, this was explicitly done in an unpublished and hardly known paper by Black (1974), and a few years later by Breeden/ Litzenberger (1978). By referring to the rules of differentiation with respect to boundaries of integrals, and expressions within the integral (generally known as Leibnitz rules), he derives the "remarkable" expression

(3)... $$\frac{\partial P_1}{\partial M} = -\int_M^{\omega} f(x) dx = -F(M) \qquad \text{(equation 16, p. 50),}$$

where $F(x) \equiv \int_x^{\omega} f(x) dx$, and $F(M)$ is the exercise probability of the option; apparently the sign of $\frac{\partial F(x)}{\partial x}$ is negative. Equation (3) postulates that the negative of the exercise probability is equal to the first derivative of the option price with respect to the exercise price (respectively, M). He notes this expression makes it much easier to solve for the option price P_1 than in the standard valuation approach, namely by evaluating the indefinite integral

(4)... $P_1 = -\int F(M)dM + c$ (equation 19, p. 51)

where c is a constant which is not difficult to compute (it will be zero or negligible in most cases). This is a powerful result: Option prices can be computed by integrating $F(M)$ over M. Depending on the functional form of $f(x)$, this drastically simplifies the computation of option prices. From there, it is straightforward to show that the second derivative

(5)... $\frac{\partial^2 P_1}{\partial M^2} = f(M)$ (equation 17, p. 51)

directly gives the value of the (probability density) function at $x = M$.[10] As Breeden/ Litzenberger (1978) have shown, this derivative multiplied by the increment dM can be interpreted as the implicit state price in the limit of a continuous state space. Bronzin also shows that equation (5) can be applied without adjustments to put options. Bronzin thus recognized the key relationship between security prices and probability densities; he was fully aware that information on the unknown function $f(x)$ is impounded in observed (or theoretical) option prices, and just need to be extracted. This establishes $f(x)$ as a true *pricing* function (or density). The analytical implications of equations (3)-(5) play a key role in his derivation of option prices (as discussed in the second part of his book).

4. *Option pricing with specific functional or distributional assumptions*

In the 2nd chapter of part II of his book, Bronzin discusses six different functional specifications of $f(x)$ and the implied shape of the density for a given range of x. From a probabilistic point of view, this part of the book seems to be slightly outdated, because the first four "distributions" lack any obvious stochastic foundation. The function $f(x)$ seems to be specified rather ad-hoc, just to produce simple probability shapes for the price deviations from the forward price: a rectangular distribution, a triangular distribution, a parabolic distribution, and an exponential distribution[11] However, the fifth and sixth specification of $f(x)$ are more interesting, namely the "(normal) law of error" and the Bernoulli theorem, or in modern terminology, the normal and binomial

[10] Bachelier (1900) on p. 51 also shows this expression, but without motivation, comments, or potential use.

distributions. This enables a direct comparison to the Bachelier and the Black-Scholes and Merton models. In what follows, we directly focus on these two specifications; a more complete discussion is contained in Zimmermann/ Hafner (2004).

Pricing option with the normal law of error (Normal distribution)

Reasoning that market variations above and below the forward price B can be regarded as deviations from the markets' "most favorable" outcome, Bronzin suggests to use the normal density as a "well-established" candidate for representing error probabilities (p. 74). The same distributional assumption was made by Bachelier (1900), while Black-Scholes-Merton formula is based on the log-normality of the underlying asset's price. Sprenkle (1964), Boness (1964) and Samuelson (1965) improved on Bachelier's formula by using the log-normality assumption to take into account the limited-liability feature of equity and other asset values.

Bronzin's normal density is characterized by $f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ which corresponds, in today's notation, to a normal distribution with zero mean and standard deviation $\sigma=\frac{1}{h\sqrt{2}}$. Setting $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ gives the normal $N\{0,\sigma^2\}$; h measures the precision of the observations and is often called *precision modulus.* Bronzin is well aware that a symmetric distribution for $f(x)$[12] around B is not consistent with the limited liability nature of the underlying "objects": while price increases are potentially unbounded, prices cannot fall below zero. However, he plays this argument down by saying that these (extreme) cases are fairly unlikely, and price variations can be regarded as more or less "uniform" and generally not "substantial" oscillations around B.

The integral to be evaluated is

$$(6)\ldots\quad P_1=\int_M^\infty(\tilde{x}-M)f(x)dx=\int_M^\infty\tilde{x}\,f(x)dx-M\int_M^\infty f(x)dx,\quad \text{with } f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

The first integral is the conditionally expected market price at maturity (corrected by the forward price) – conditional upon option exercise. The second integral is

[12] In fact, in the first chapter in part II, he explicitly allows for different functional forms of the density below and above the mean. He makes the assumption of symmetric densities on p. 55 to simplify the subsequent analysis.

the exercise probability. No explicit solution is available for the second integral, but Bronzin provides a table for alternative values for $\psi(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t^2}dt$ in an Appendix (pp. 84-85). In contrast to the second integral, the first integral has an explicit solution[13],

$$(7)\ldots \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{M}^{\infty}\tilde{x}\, e^{-h^2x^2}dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2h^2}e^{-M^2h^2}\right\} = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}e^{-M^2h^2}.$$

Bronzin's pricing formula for call options is then

$$(8)\ldots \quad P_1 = \frac{1}{2h\sqrt{\pi}}e^{-M^2h^2} - M\psi(hM), \qquad \psi(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon}^{\infty}e^{-t^2}dt. \text{ (equation 43, p. 76)}$$

This formula enables to separate between the impact of volatility ($M=0$) and intrinsic value on option price. Notice that the first term adds the same positive amount to the option value irrespective whether the option is in- or out-of-the money ($M \neq 0$).

After adjusting for the specific distributional assumptions, it is easy to show that this formula is fully consistent with the Black-Scholes and Merton, and, respectively, the Black (1976) forward price based valuation models; see the Appendix at the end of this paper. Alternatively, one could write the Black-Scholes formula in the "Bronzin style" as

$$(9)\ldots \quad P_1 = B\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z_2)^2} - M\, N\{z_2\}, \qquad \text{with } z_2 = \frac{\ln\frac{B}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}.$$

After discussing option prices under the normal low of error, Bronzin relates the model to the binomial distribution ("Bernoulli theorem") of the underlying asset price. Bronzin argues that this case can be understood as a concrete specification of the (inverse) volatility factor h in the previous distribution. The reasoning of the author to motivate this distribution is very similar to the binomial model of Cox/ Ross/ Rubinstein (1979). This assumes that s (consecutive) price

[13] The solution of the integral $\int x\, e^{ax^2}dx$ is $\frac{1}{2a}e^{ax^2}$. Setting $a=-h^2$ and evaluating the integral at the boundaries $[M,\infty]$, we find $\int_{M}^{\infty}x\, e^{-h^2x^2}dx = \left[\frac{1}{-2h^2}e^{-h^2x^2}\right]_{M}^{\infty} = -\frac{1}{-2h^2}e^{-h^2M^2}$.

movements[14] are governed by "two opposite events" (e.g. market ups and downs) with probability p and q, which can be thought as Bernoulli trials. The expected value of the distribution is sp (or alternatively, sq). Of course, the events can be scaled arbitrarily by choosing the parameter s appropriately. Therefore, one of the expected values (which one is arbitrary) can be set equal to the forward price, e.g. $B = sp$. The price distribution can then be understood as being generated by cumulative deviations of market events from their most likely outcome, the forward price. The standard deviation of this distribution is thus $\sqrt{spq} = \sqrt{Bq}$. The option prices can then be derived easily.

5. *Bronzin's contribution in historical perspective*

When comparing Bronzin's contribution to Bachelier's thesis, which should be regarded as the historical benchmark, then without any doubt, Bachelier was not only earlier, but his analysis is more rigorous from a mathematical point of view. Bronzin can not be credited for having developed a new mathematical field, as Bachelier did with his theory on diffusions. Bronzin did no stochastic modeling, applied no stochastic calculus, derived no differential equations (except in the context of our equation 4), he was not interested in stochastic processes, and hence his notion of volatility has no time dimension. But apart from that, every element of modern option pricing is there:

- He noticed the unpredictability of speculative prices, and the need to use probability laws to the pricing of derivatives.

- He recognized the informational role of market prices, specifically the forward price, to price other derivatives. No expected values show up in the pricing formulas. His probability densities can be easily re-interpreted as risk-neutral pricing densities.

- He understood the key role of hedging and arbitrage for valuation purposes; he derives the put-call parity condition, and uses a zero-profit condition to price forward contracts and options.

- He develops a simplified procedure to find analytical solutions for option prices by exploiting a key relationship between their derivatives (with respect to their exercise prices) and the underlying pricing density. He also stresses the empirical advantages of this approach.

[14] Again, there is no reference to a time dimension in Bronzin's approach. In the Cox/ Ross/ Rubinstein (1979) setting, these would be interpreted as consecutive market movements. In the Bronzin setting, the binomial approach is just used to characterize the deviations from the expected (i.e. forward) price.

- He extensively discusses the impact of different distributional assumptions on option prices.

Besides of pricing simple calls and puts, he develops formula for chooser options and, more important, repeat-options. All this is a remarkable achievement, and it is done with a minimum of analytics.

It is difficult to evaluate how Bronzin judged the scientific originality of his booklet, and whether this is a fair criterion to apply at all – because nothing is known about its purpose or target audience. Given that he published it as a "professor", and given that he has published a textbook on actuarial theory for beginners two years before (Bronzin 1906), it may well be that he regarded his option theory as a simple textbook, or a mixture between textbook and scientific monograph. Apparently, Bronzin did not overstate his own contribution – he even understates it by regularly talking about his "booklet" (in German: *Werkchen*) when referring to it.[15]

An open question is to what other publications Bronzin is referring to: He surely knew the most important publications in German about probability and options. Options were well known instruments at this time at the stock exchanges in the German spoken part of Europe, and the many different forms of contracts were described in most textbooks. Moreover, several books treated legal issues related to options. But the mathematical modeling of options didn't seem to be an issue in the literature. In this context, the natural question arises, whether Bronzin knew about Bachelier's work. *Honni soit qui mal y pense …* - but extensive quoting was not the game at the time anyway. Bachelier did not quote any of the earlier (but admittedly, non mathematical) books on option valuation either. For example, the book of Regnault (1863) was widely used and contains the notion of random walk, the Gaussian distribution, the role of volatility in pricing options, including the square-root formula. According to Whelan (2002) who refers to a paper by Émile Dormoy published in 1873, French actuaries had a reasonable idea to price options well before Bachelier's thesis, although a clear mathematical framework was missing. Einstein in his Brownian motion paper (1905) did not quote Bachelier's thesis as well; it is an open issue whether he knew the piece at all. Distribution of knowledge seems to have been pretty slow at this time, particularly between different fields of research, and across different languages. And again, extensive references were simply not common in natural sciences (e.g. Einstein's paper contains a single reference to another author).

[15] The German word is actually a funny combination of *Work* which means, in an academic setting, a substantial contribution, while the ending *...chen* is a strong diminutive.

Thus, it remains an open question whether Bronzin was aware of Bachelier's thesis. At least, based on his training in mathematics and physics at the University of Vienna (see Section 6 below), he would have been perfectly able to understand and recognize the Bachelier's seminal work.[16] After all, the question is not so relevant, because the approach is fundamentally different, and there are sufficiently many innovative elements in his treatise. It is also surprising that (almost) no references are found *on* his work. Although it is generally claimed that Bachelier's thesis was lost until the Savage-Samuelson rediscovery (as reflected in Samuelson 1965) it was at least quoted since 1908 in several editions of a French actuarial textbook by Alfred Barriol.

Bronzin's book had a similar recognition. As stated earlier, it was mentioned in Leitner's book about banking in Germany, published in four editions. And with Bronzin's more pragmatic pricing approach, it is difficult to understand why the seeds for another, more scientific understanding of option pricing did not develop, or the formulas did not get immediate practical attention. At least, Bronzin was not a doctoral candidate as Bachelier, but a distinguished professor regularly mentioned in the *Scientists' Annual* ("Jahrbuch der gelehrten Welt"). Moreover, the flourishing insurance industry in Trieste should have had an active commercial interest in his research. It however might be evidence for Hans Bühlmann's and Shane Whelan's[17] claim that the contribution of actuaries to financial economics is generally underestimated (see Whelan 2002 for detailed references).

6. *On the socio-economic and scientific background of Bronzin's work*

Bronzin's contribution to the theory of option pricing has several roots. He got his mathematical training during his studies at the University of Vienna, where he was a student of Ludwig Boltzmann, a leading physicist around the turn of the century. From 1894-96 he attended lectures and seminars in thermodynamics, analytical mechanics and the kinetic theory of gases. Boltzmann's achievement

[16] The referee of this *Journal* pointed us to the fact that apparently, the work of Louis Bachelier was well known in Italy shortly after being published. He referred us to the following quote in Granger/ Morgenstern (1970), page 76: "The only economist to our knowledge who has paid repeated attention to Bachelier was A. de Pietri-Tonelli, a student and exposer of Pareto who, in his work 'La Speculazione di Borsa' [1912], repeatedly quoted Bachelier approvingly. (…) His references to Bachelier were repeated in his later, more popular book 'La Borsa' [1923]. (…) De Pietri-Tonelli, in turn, was completely neglected in Anglo-American literature." Apparently, the year of the first publication should be 1919 instead of 1912 (see e.g. Barone 1990).

[17] See Whelan (2002) for detailed references.

[19] Boltzmann published the respective papers in 1872, 1876 and 1877; see Boltzmann (2000) for a (German) collection of his important papers on probability and entropy.

was to combine Maxwell's theory of gases with probability theory. He developed a mathematical model which describes the behaviour of materials on a microscopic level by establishing a relationship between the probability of the states of small particles and the entropy (the "disorder") of a system. He thereby developed a probabilistic formulation of the second law of thermodynamics.[19] Boltzmann's contribution is one of the key elements of Einstein's (1905) model of the Brownian motion – which paralleled Bachelier's diffusion model of stock prices. Given the background of Bronzin's education, it is therefore surprising that his option pricing approach does not reflect the probabilistic foundations of Boltzman's approach, but rather modelled stock prices as a static distribution.[20]

Bronzin got a professorship in mathematics at the *K.u.K. Handels- und Nautische Akademie* in Triest ("Imperial and Royal Court Academy of Commerce and Nautical Science"), where he gave lectures on political arithmetics, which corresponds to today's actuarial mathematics. The academy was founded in 1817 with the strong support of the Habsburgian-Hungarian administration in order to stimulate the economic role of Trieste which was the only place within the Empire with access to the Mediterranean. By contrast, the Export Academy in Vienna was founded only 80 years later which made the Triestian academy the only place offering higher education in commercial matters for several decades.[21]

Trieste with its harbor was a flourishing place around the turn of the century, and the success was highly beneficial to the insurance business. Three big insurance companies had their headquarters in Trieste: Generali, RAS and Lloyd Adriatico. Beside traditional commercial insurance, the life insurance business grew significantly in the last decades of the 19th century. In contrast to the German Empire, where Chancellor Bismarck advocated a public funded pension system in order to strengthen the ties to the "Vaterland" and to "raise the conservative ethos among the big mass of poor"[22], old-age insurance was exclusively provided by private insurance companies in the Habsburgian-Hungarian Empire. Within three decades, from 1880 to 1910, number of newly issued life insurance contracts quadrupled with Generali and RAS.[23]

---

[20] Ironically it was Bachelier who took up the idea of Boltzmann's statistical approach.

[21] See Sedlak (1948), pp. 247ff. The 1903 curriculum of the academy was also used as a guideline for the curriculum of all other higher schools of commerce throughout the whole empire. See: „Lehrpläne für höhere Handelsschulen", in: Archivio dello stato di Trieste, atto "Accademia di commercio e nautica in Trieste", b 101 e regg 273, cif A195, 1903. The *Istituto Revoltella* was founded by a businessman from Trieste and inaugurated in 1876; see Vinci (1997), pp. 98ff.

[22] See Loth (1996), p. 68.

[23] See Assicurazione Generali (1931). Generali described this time as „roaring" (*stürmisch*); p. 103 and Riunione (1939), p. 407ff.

The increasing importance of the (life) insurance business required a solid mathematical and statistical basis. It is interesting to notice that the first attempt of Bismarck to establish a mandatory old-age and disability insurance failed due to lacking statistical records.[24] Among the insurance companies, there was a competition for having the best actuarial models, and hiring the best actuaries. Generali, for example, was apparently very proud of its actuarial models used in the life business, being elaborated by the in-house mathematicians Vitale Laudi and Wilhelm Lazarus over several decades: they published an opulent, self-contained monograph on its entire actuarial foundations ("Rechnungs-grundlagen") in 1905 – ironically, two years before switching to widely-used approach of Gompertz-Makeham (see Graf 1905) This was not without impact on the self-confidence of the actuarial profession; in an editorial of the Austrian Review of Insurance and Economics entitled "The position of the actuary in science", Nicholls (1899) even raised the methodological approach of actuarial science to the general standard of "true scientific thought".[26]

Insurance mathematics became part of the curriculum at the Technical University of Vienna in 1895, and Ernst Blaschke became the first chairholder.[27] Apparently, however, the field did not get quick recognition within the classical disciplines of mathematics. The scepticism against applied mathematics was widespread among the leading mathematicians of these days; they were worried about becoming an "accessory" of applied disciplines (such as engineering, physics or economics) and being exploited for governmental affairs. They anticipated that the university could become too much an institution educating civil servants and thereby loosing the autonomy from the government. This attitude is reflected in the inaugural speech of Knight Gustav Escherich, a famous mathematician, as chancellor of the University of Vienna in 1903 (Escherich 1903). Basically, what he said is that "there is not only no silver bullet in mathematics, but also no 'engineering bullet'. Developing mathematics as an applied science would destroy its general character and make it useless as cognitive tool." Escherich also mentioned the situation of the French universities, where the autonomy was endangered until recently.[28]

---

[24] See Pflanze (1998), p. 405.
[26] Original text: „*Ich [...] behaupte, dass der Geist, der Ideen, Meinungen und Theorien von dem kalten Standpunkte der ihnen innewohnenden Wahrheit ohne Berücksichtigung der persönlichen Ansicht abwägt und mit seinen Thatsachen so verfährt, wie der Actuar es mit seinen Beobachtungen thut, der wahre wissenschaftliche Geist ist, und dass die Schwäche der Wissenschaft darin liegt, bis zu welchem Grade sie die Principe der Lehre der Chancen ignorirt hat.*" See Nicholls (1899).
[27] See Czuber (1910), p. 15.
[28] See Escherich (1903), p. 60.

Accidentally, it was also Escherich who reviewed Bronzin's book in the famous *Monatshefte für Mathematik und Physik* and commented that "it can hardly be assumed that the results will attain a particularly practical value"[29]; of course, Bronzin's work could not meet the perception and standard of Escherich's mathematical ethos. This attitude was somehow similar to the reservation of Poincaré on Bachelier's thesis (see Taqqu 2001). Apparently, both wanted to protect mathematics from being applied to "queer" topics such as stock exchange operations.

It therefore seems that Bronzin's work did not get recognition with his fellow mathematicians, it was also beyond the topics insurance actuaries were trained with, and investment professionals – traders, brokers and speculators – were simply not equipped with the analytical training to understand the practical relevance of the work. And the same is true for Bachelier.

The economic importance of the insurance business is also reflected in the curriculum of the Academy in Trieste. The courses included "introduction to probability theory; annuities; securities and commodities trading; stock and commodity exchanges; spot and forward contracts; premium contracts; …".[30] Interestingly, actuarial practice was not a pillar of the curriculum. It is therefore not surprising that the delegates of the chamber of commerce complained in a newspaper article published in 1908 that there were only two lessons thought in actuarial practice in final year of the program.[31]

Overall, the big Triestian companies had only a limited interest in the educational efforts on the Academy. Even though a substantial part of the junior staff of the flourishing insurance companies, local banks and trading firms were trained in the Academy, the financial situation of the school was bad.[32] According to a newspaper article in 1909, visitors of the Academy noticed that an old-fashioned urinal „inevitably flooded the terrace and caused an offensive smell…; sometimes windows were falling out of the rotten frames …; once half a frame fell down on the street, luckily without harming anyone."[33]

[29] See: *Monatshefte für Mathematik und Physik 21,* Verlag des Mathematischen Seminars der Universität Wien. Original text: „*Es ist kaum anzunehmen, daß die bezüglichen Resultate einen besonderen praktischen Wert erlangen können, wie ja übrigens auch der Verfasser selbst andeutet*". The last part of the sentence ("... which is also noticed by the author") is simply not true. Bronzin also attended lectures and seminars with Escherich, so it can be assumed that the reviewer personally knew the author of the book.

[30] Archivio dello stato di Trieste, atto "Accademia di commercio e nautica in Trieste", b 101 e regg 273, cif A195, 1903.

[31] Triester Zeitung, 20th January, 1909.

[32] In 1904/05, four of the alumnis got a job by Generali, the rest got jobs by banking and trading corporations. Source: I.R. Accademia di Commercio e di Nautica in Trieste, Sezione Commerciale, Anno Scolastico 1904-1905, Trieste 1905

[33] See: Triester Zeitung, 29th January, 1910.

In the short period before world war one, the number of students strongly increased. In 1907, 126 students enrolled at the Academy, and the number increased to 173 on year later. During this period the economy at Trieste was also growing due to the modernization plans under the chancellorship of Ernest von Koerber. He wanted to pacify the conflicts between the different nations of the Habsburg-Hungarian empire by promoting and stimulating trade programs; he also wanted to build a direct railroad connection between Trieste and Vienna. However, the positive economic climate had virtually no impact on the stock exchange of Trieste – Vienna remained the principal place in stock exchange transactions. The turnover remained at low levels.[34]

Nevertheless, the professors and students kept their loyalty towards the local stock exchange, and the representatives of the exchange did their best to improve the financial condition of the Academy. A visitor from the Chamber of Commerce of Trieste reported in 1908: "Thanks to kindness of some experienced stock jobbers, the students got an introduction to the functioning of bank operations, futures contracts, and other important trade operations".[35] Compared to the development in other parts of Europe this visit and explanations were remarkable. In Vienna, forward contracts and futures trading nearly disappeared in 1901, when a court accepted the "objection of gaming" against these transactions and contracts, which undermined their legal basis.[36] It also paralleled the bad social prestige of professional groups who made their money with stock exchange operations.[37] Thus, the timing of Bronzin's publication was bad indeed, and it is possibly a further explanation why the work did not get due recognition.

[34] Archivio dello stato di Trieste, atto „Listino Ufficiale della Borsa di Trieste" sub „Borsa", B 18, 1905ff
[35] See: Triester Zeitung, 20th January, 1909.
[36] See Schmit (2003), pp. 143ff.
[37] See Michel (1976), p. 371.

Appendix: From Bronzin to Black-Scholes

We show how to rewrite the Bronzin's equation to get the Black-Scholes formula. Notice that the notation in this appendix is ours, not Bronzin's. Specifically, we introduce the following variables: the time to maturity T, the underlying asset price today S_0 and at expiration S_T, the exercise price K, the mean and volatility of the log price change of the underlying per unit time, μ and σ, the standard normal $\tilde{z}$ with density $N'(z)$.

We start with equation (6) and have to re-interpret the variables: we replace $\tilde{x} - M = [\tilde{S}_T - B] - [K - B] = \tilde{S}_T - K$, where we assume that $\tilde{S}_T$ is the *log*normally distributed stock price whereas $\tilde{x}$ is the deviation from the forward price, and assumed normal in the specification of equation 6. In terms of the standard normal $\tilde{z}$, we get

$$\text{(A.1)}\ldots \qquad \tilde{S}_T = S_0 e^{\mu T + \sigma \tilde{z}\sqrt{T}}, \text{ with } \mu = \frac{E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]}{T}, \sigma^2 = \frac{Var\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]}{T}.$$

Adapting the risk-neutral valuation approach, the drift of the log stock price changes can be replaced by $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$. In order to be consistent with Bronzin's equation, we assume an interest rate of zero and one time unit to maturity, $T = 1$ (e.g. one year if volatility is measured in annual terms). The forward price is then equal to the current stock price, $B = S_0$, implying $\tilde{S}_T = Be^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\tilde{z}}$. The Black-Scholes valuation equation can then be written as

$$\text{(A.2)}\ldots \qquad P_1 = \int_{-z_2}^{\infty} \left(Be^{-\frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\tilde{z}} - K \right) N'(z)dz,$$

The remaining task is to investigate how the lower integration boundary of the lognormal integral (A.2), denoted by $-z_2$, is related to M in (6), respectively hM in (8). We have

$$\psi(hM) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{hM}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_2 = M/\sigma(x)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_2 = -M/\sigma(x)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

where the integration boundary can be approximated by

$$z_2 = -\frac{M}{\sigma(x)} = -\frac{K-B}{B\sigma} = -\frac{\frac{K}{B}-1}{\sigma} \approx -\frac{\ln\frac{K}{B}+\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} = \frac{\ln\frac{B}{K}-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} = \frac{\ln\frac{S_0}{K}-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$$

which is exactly the Black-Scholes boundary. The derivation shows that Bronzin's valution equation (11) is fully consistent with the Black-Scholes, and, respectively, the Black (1976) forward price based valuation models.

References

Assicurazione Generali, Ed. (1931), *Die Jahrhundertfeier der Assicurazioni Generali*, published by Assicurazioni Generali, Triest (Selbstverlag).

BACHELIER, LOUIS (1900, 1964), *Théorie de la speculation*, Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Supérieure, Paris, Ser. 3, 17, pp. 21-88. English translation in: *The random character of stock market prices* (ed. PAUL COOTNER), MIT-Press (1964), pp. 17-79.

BARONE, EMILIO (1990), The Italian stock market: Efficiency and calendar anomalies, *Journal of Banking and Finance* 14, pp. 483-510.

BARONE, EMILIO AND DOMENICO CUOCO (1989), The Italian market for 'Premium' Contracts. An application of option pricing theory, *Journal of Banking and Finance* 13, pp. 709-745.

BLACK, FISCHER (1974), The pricing of complex options and corporate liabilities, unpublished manuscript, University of Chicago.

BLACK, FISCHER (1976), The pricing of commodity contracts, *Journal of Financial Economics* 3, pp. 167-179.

BLACK, FISCHER AND MYRON SCHOLES (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81, pp. 637-654.

BOLTZMANN, LUDWIG (2000), *Entropie und Wahrscheinlichkeit*, Harri Deutsch (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, vol. 286).

BONESS, JAMES (1964), Elements of a Theory of Stock-Option Value, *Journal of Political Economy* 72, pp. 163-175.

BRONZIN, VINZENZ (1904), Arbitrage, *Monatsschrift für Handels- und Sozialwissenschaft* 12, pp. 356-360.

BRONZIN, VINZENZ (1906), *Lehrbuch der politischen Arithmetik*, Franz Deuticke.

BRONZIN, VINZENZ (1908), *Theorie der Prämiengeschäfte*, Franz Deuticke.

BREEDEN, DOUGLAS AND ROBERT LITZENBERGER (1978), Prices of state-contingent claims implicit in option prices, *Journal of Business* 51, pp. 621-651.

COURTADON, GEORGES (1982), A note on the premium market of the Paris Stock Exchange, *Journal of Banking and Finance* 6, pp. 561-565.

COX, JOHN AND STEPHEN ROSS (1976), The valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics* 3, pp. 145-166.

COX, JOHN; STEPHEN ROSS AND MARK RUBINSTEIN (1979), Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics* 7, pp. 229-263.

CZUBER, EMANUEL (1910), Der mathematische Unterricht an den Technischen Hochschulen, in: *Bericht über den mathematischen Unterricht in Oesterreich*, Alfred Hölder,

DE PIETRI-TONELLI, ALFONSO (1919), *La speculazione di borsa*, Industrie Grafiche Italiane-Rovigo.

DE PIETRI-TONELLI, ALFONSO (1923), *La Borsa. L'ambiente, le operazioni, la teoria, la regolamentazione*, Ulrico Hoepli Milano.

EINSTEIN, ALBERT (1905), Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen", *Annalen der Physik* 17, pp. 549-560.

ESCHERICH, GUSTAV RITTER VON (1903), *Reformfragen unserer Universitäten*, Inauguration Speech, in: Die Feierliche Inauguration des Rektors der Wiener Universität für das Jahr Studienjahr 1903/1904, am 16. Oktober 1903, Vienna, University Press (Selbstverlag der Universität).

FLUSSER, GUSTAV (1911), Über die Prämiengrösse bei den Prämien- und Stellagegeschäften, *Jahresbericht der Prager Handelsakademie*, pp. 1-30.

GRAF, JULIUS (1905), *Die Rechnungsgrundlagen der k.u.k. priv. Assicurazioni Generali in Triest*, published by Assicurazioni Generali, Triest (Selbstverlag).

GRANGER, CLIVE AND OSKAR MORGENSTERN (1970), Predictability of Stock Market Prices, Heath Lexington Books.

LEITNER, FRIEDRICH (1920), *Das Bankgeschäft und seine Technik*, Sauerländer (4th ed.).

LOTH, WILFRIED (1996), *Das Kaiserreich. Obrigkeitsstaat und politische Mobilisierung*. Deutscher Taschenbuch-Verlag.

MEITHNER, KARL (1924), *Abschluss und Abwicklung der Effektengeschäfte im Wiener Börsenverkehr*, Veröffentlichungen des Banktechnischen Institutes für Wissenschaft und Praxis an der Hochschule für Welthandel in Wien.

MERTON, ROBERT C. (1973), Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, pp. 141-183.

MICHEL, BERNARD (1976). *Banques et banquiers en Autriche au début du Xxe siècle*. Presses de Sciences Politiques, Paris.

NICHOLLS, WALTER S. (1899), Die Stelle des Versicherungsactuars in der Wissenschaft, *Oesterreichische Revue – Organ für Assecuranz und Volkswirthschaft* 38 (18th September 1899).

PFLANZE, OTTO (1998): *Bismarck: Der Reichskanzler*, Beck.

REGNAULT, JULES (1863), *Calcul des chances et philosophie de la bourse*, Mallet-Bachelier et Castel, 219 p. (online version: http://driout.club.fr/Calcul_de_Regnault.html).

Riunione Adriatica di Sicurita, Ed. (1939), *Nel Primo Centenario della Riunione Adriatica di Sicurtà (1838– 1938)*, Editrice La Compagnia Trieste.

ROSS, STEPHEN (1976), Options and efficiency, *Quarterly Journal of Economics* 90, pp. 75-89.

SAMUELSON, PAUL A. (1965), Rational theory of warrant pricing, *Industrial Management Review* 6, No. 2, pp. 13-32.

SCHMIT, JOHANN (2003), *Die Geschichte der Wiener Börse*, Bibliophile Edition Wien.

SEDLAK, VINZENZ (1948), Die Entwicklung des Kaufmännischen Bildungswesens in Oesterreich in den letzten hundert Jahren; in: *100 Jahre Unterrichtsministerium 1848-1948* (ed. EGON LOEBENSTEIN), Festschrift des Bundesministeriums für Unterricht in Wien.

SPRENKLE, CASE (1964), Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences, in: *The Random Character of Stock Market Prices* (ed. PAUL COOTNER), MIT Press, pp. 412-474.

STOLL, HANS (1969), The relationship between call and put option prices, *Journal of Finance* 23, pp. 801-824.

TAQQU, MURAD S. (2001), Bachelier and his times: A conversation with Bernard Bru, *Finance and Stochastics* 5, pp. 3-32.

VINCI, ANNA MARIA (1997), *Storia dell'Università di Trieste: Mito, Progetti, Tealtà*, Quaderni del Dipartimento di Storia, Università di Trieste, Edizioni Lint, p. 98ff.

WELCKER, JOHANNES; JÖRG KLOY; KLAUS SCHINDLER AND JÖRG AUDÖRSCH (1988), *Professionelles Optionsgeschäft*, Verlag Moderne Industrie.

WHELAN, SHANE (2002), Actuaries' contributions, *The Actuary* (December), pp. 34-35.

ZIMMERMANN, HEINZ AND HAFNER, WOLFGANG (2004), Amazing Discovery – Professor Bronzin's option pricing models (1908), Manuscript, long version, Universität Basel.